

조세 및 재정제도 분석을 위한 방법론: 이론과 실제 활용

저자 | 한치록 윤참나 김준성 이승희



『재정전문가 네트워크』는 학계, 정부, 연구원으로 구성된 다양하고 광범위한 재정전문가 네트워크를 통하여 합리적이고 균형 잡힌 재정정책 대안을 제시하는 데 목적을 두고 있습니다.

본 보고서는 한국조세재정연구원의 의뢰로 외부 연구진이 작성하였으며, 이에 포함된 내용은 한국조세재정연구원 및 연구자 소속 기관의 공식 의견이 아님을 밝힙니다.

목 차

제1장 패널 대기간 처치 관련 최근 연구 동향 및 가중평균 DID를 이용한 통일적 접근법의 검토 | 한치록

I. 서론	3
II. 정책의 점진적 도입과 이중차분법	28
III. 정책의 점진적 도입 시 정책효과의 식별	45
IV. 결론	95
참고문헌	97

제2장 구조분석의 개념과 적용 | 윤참나

I. 서론	103
II. 구조적 추정	105
III. 동태적 구조분석	110
IV. 동적 이산선택모형	119
V. 정리와 실무적 유의점	133
참고문헌	139

제3장 연구 설계를 활용한 도구변수 구축 및 평가방법 | 김준성

I. 서론	143
II. 변이할당 도구변수 구축 및 인과효과 식별	146
III. 시뮬레이션 도구변수와 재중심화 도구변수	167
IV. 네트워크 모형과 도구변수 구축	175
V. 그 밖의 공식기반 도구변수	181
VI. 결론	183
참고문헌	185
부록	188

I. 서론	193
II. 시계열 예측 과정	195
III. 나우캐스팅	204
IV. 결론	229
참고문헌	231

표 목 차

〈표 1-1〉 정책의 동시 적용과 점진적 적용의 예	28
〈표 1-2〉 CH(2020) 예에서 처치더미	31
〈표 1-3〉 mpdta.dta 데이터셋 관측치 구조	50
〈표 1-4〉 csdid에서 옵션간 비교시점의 비교	62
〈표 1-5〉 csdid 옵션별 기준시점과 비교시점(g2006 그룹의 예)	62
〈표 1-6〉 Not yet treated를 사용하는 경우 csdid와 jwdid의 비교	70
〈표 1-7〉 csdid와 jwdid에서 not yet treated 대조 시 사용되는 관측치의 비교	73
〈표 1-8〉 그룹별 시기별 처치상태 더미변수	90
〈표 1-9〉 실험 데이터에서 처치 더미변수와 처치효과 설정값	93
〈표 1-10〉 T=3에서 가능한 6개의 2x2 DID	94
〈표 2-1〉 축약형과의 비교	108
〈표 2-2〉 Calibration과의 비교	110
〈표 2-3〉 두 방법의 비교	123
〈표 3-1〉 로템버그 가중치 계산을 위한 데이터 구조	154
〈표 4-1〉 예측력 비교(평균제곱오차)	203
〈표 4-2〉 나우캐스팅에 활용된 월별 거시/금융변수(총 45개)	223
〈표 4-3〉 나우캐스팅 예측 활용 월별 거시/금융변수(총 11개)	224
〈표 4-4〉 예측력 비교(평균제곱오차)	226

그림목차

[그림 1-1] 평행추세 가정과 DID	12
[그림 1-2] hospdd 자료 환자 만족도	16
[그림 1-3] 그룹별 평균 성과변수의 시계열	19
[그림 1-4] 그룹 간 평균의 차이	20
[그림 1-5] TWFE의 음의 가중치 설명	34
[그림 1-6] Goodman-Bacon decomposition	41
[그림 1-7] g2006 그룹의 연도별 ATT	57
[그림 1-8] 최초 처치 시점 대비 상대시기별 ATT	58
[그림 1-9] long2 옵션 사용 시	61
[그림 1-10] jwddid에서 상대시간별 처치효과	69
[그림 1-11] did_imputation 패키지를 이용한 그림	82
[그림 1-12] 생성한 자료에 csdid를 적용한 결과	85
[그림 1-13] honestdid를 이용한 신뢰구간	87
[그림 3-1] 로템버그 가중치 시각화 예시	157
[그림 3-2] 시장접근성과 중국 고속철도 노선망 건설현황	173
[그림 3-3] 재중심화 시장접근성	173
[그림 3-4] 간단한 네트워크 예시	175
[그림 4-1] 표본외 예측 평가방식	197
[그림 4-2] 평균제곱오차와 평균절대오차	199
[그림 4-3] 국내총생산 예측(2021년 1분기~2023년 2분기)	203
[그림 4-4] 상태공간모형 추정과정	209
[그림 4-5] EM 알고리즘 추정과정	217
[그림 4-6] 뉴욕연방준비은행 나우캐스트(2025년 3분기)	219
[그림 4-7] 국내총생산 나우캐스트(2021년 1분기~2023년 2분기)	225
[그림 4-8] 국내총생산 나우캐스트(2021년 1월 첫째주~2023년 6월 넷째주)	226

제 1 장

패널 다기간 처치 관련 최근 연구 동향 및 가중평균 DID를 이용한 통일적 접근법의 검토

한 치 록 | 고려대학교 경제학과

1. 도입

본 연구¹⁾에서는 정책이 점진적으로 도입(staggered adoption)되는 경우 정책효과 분석 방법론에 대하여 논의한다. 패널 다기간 처치와 관련된 최근의 연구에 관하여 서술하고, 문헌에서 제안된 다양한 방법들을 단순 이중차분(difference-in-differences, DID)²⁾ 모수들의 평균으로서 통일적으로 이해하고자 한다. 본 장에서는 우선 이중차분법에 대하여 설명하고 최근 Stata 버전에 포함된 명령어들을 사용하여 간편히 구현하고 결과를 해석하는 방법을 실습한다. 이 글의 목적은 실무적인 관점에서 관련 방법들의 활용을 돕는 것이다. 계량경제 이론과 관련된 논의를 어느 정도 포함해서 완결성을 높임과 동시에, 다양한 Stata 패키지의 활용 예제를 상세하게 소개하여 조세재정 실증연구자들의 간편한 참조를 돕고자 한다.

이중차분법은 통상적으로 패널 양방향 고정효과(two-way fixed effects, TWFE) 회귀를 이용하여 구현된다(2절 참조). 정책이 처치군의 모든 개체에서 동시에 도입되는 경우, TWFE 추정량은 이들 정책효과들의 가중평균을 추정한다. 이 가중평균에서 사용되는 가중치는 항상 비음(nonnegative)이며, 그 결과 정책효과가 이질적이라도 TWFE는 일종의 가중평균 정책효과로 해석된다(3절 참조).

하지만 패널자료에서 정책 도입 시점이 다양할 때, 만약 정책효과가 정책 도입 시점에 따라 상이하거나 정책 도입 후 경과 시간에 따라 상이하다면, TWFE가 여러 정책효과들의 선형결합³⁾이 되는 것은 여전히 맞으나, 선형결합에 사용되는 계수들이 비음(nonnegative)이 되어야 한다는 보장이 없다. 그 결과, 정책효과들의 이질성이 현저하면 모든 정책효과들의 부호는 양(+)임에도 TWFE가 음(-)의 모수를 추정하는 현상이 발생할 수 있다(II장 참조). 그러므로 패널자료 내에서 정책이 점진적으로 도입되는 경우 연구자는 모형이 정책효과들의 이질성을 제대로 반영하고 있는지 확인하는 것이 중요하며, 통상적인 TWFE 모형을 별다른 검토 없이 회귀에 그대로 적용하면 잘못된 결과로 이어

1) Staggered adoption과 관련된 문헌 정리, 계량경제이론과 다양한 Stata 패키지의 이해에 도움을 준 고려대학교 박민철 박사과정생에게 감사한다.

2) 이중차분법에 대한 영문 저서로 Lee(2016)가 있으며, 정책의 점진적 도입 등 최근의 연구까지 반영한 국문 저서로 강창희·박상곤(2025)이 있다. 강창희·박상곤(2025)의 IV장이 정책의 점진적 도입을 설명하고 있다.

3) 선형결합 시 계수들의 합계는 1이다.

질 수 있다.

최근 수년간 정책의 점진적 적용과 관련된 이론과 소프트웨어 패키지가 다수 개발되고 제시되었다. 개발된 이론의 핵심은 DID 적용 시 비처치 관측치만을 비교군으로 사용하거나, 모형을 유연하게 설정하여 정책효과의 이질성을 모형에 충분히 반영하도록 해주는 것이다. III장에서는 이와 관련된 여러 논의와 Stata 패키지 사용법을 소개한다. 특히 다양한 패키지 간의 공통점과 차이점을 설명하여 응용연구자들이 패키지를 선택할 때 도움을 주고자 한다. 이 장에서는 또한 문헌에서 제안된 다양한 방법들을 단순 DID 모수들의 평균으로서 통일적으로 이해하고 이를 단일한 회귀로써 신속히 추정하는 방법에 대해서도 설명한다.⁴⁾

점진적인 정책 채택의 문제는 조세재정 관련 연구에서 중요한 시사점을 갖는다. 예를 들어 세계개편이 지역별 또는 국가별로 다른 시점에서 도입될 때 그 효과를 다각적이고 입체적으로 분석할 수 있게 해 준다. 이로써 정책의 인과적 효과를 보다 정밀하게 측정할 수 있다. 이러한 분석이 가능하므로, 정책을 일괄 도입하는 대신 단계 도입하는 전략을 설계하는 데 도움이 되고, 이는 리스크 관리 측면에서 이점이 된다. 또한 사전에 평가체계를 세우고 도입 후 효과와 부작용을 보다 체계적으로 분석할 수 있게 해 준다.

2. 이중차분법과 양방향 고정효과 회귀

가. 횡단면 비교, 전후 비교, 증가분의 비교

이중차분법은 자료를 이용하여 정책의 효과를 측정하기 위하여 널리 사용되는 방법 중 하나이다. 정책의 적용을 받은(D=1) 개체들과 그렇지 않은(D=0) 개체들로 이루어진 자료집합이 있을 때, 가장 간단히 생각해 볼 수 있는 방법은 D=1인 개체들의 성과변수(Y)의 평균값과 D=0인 개체들의 성과변수의 평균값 간 차이를 구하는 것일 것이다('횡단면 비교'). 이 방법은 Y를 D에 대하여 (필요시 여타 통제변수들을 우변에 포함하여 통제하고) 최소제곱(OLS) 회귀함으로써 구현할 수 있다. 만약 처치군과 대조군이 서로간에 동질적이어서 비교 가능하다면 이러한 횡단면 비교 방법은 정책효과를 편향되지 않게 추정해 준다. 수학적으로, $Y = \alpha + \beta D + X\gamma + u$ 관계가 성립할 때, X의 통제 이후 비관측 요인들의 크기가 처치 여부에 평균적으로 의존하지 않는다면, 즉 $E(u|D, X)$ 가 D에 의존하지 않으면 (보통의 경우) OLS는 β 를 편향되지 않게 추정할 수 있다.⁵⁾ 다시 말하

4) 단, 이 방법은 개발 단계이며 추가 연구가 필요하다.

여, 만약 집단 간 정책과 무관한 차이를 설명할 수 있는 통제변수를 충분히 확보할 수 있다면 연구자는 그러한 X 변수를 통제함으로써 처치효과를 편향되지 않게 측정할 수 있을 것이다. 하지만 만약 X변수 통제 후에도 (처치 여부와 무관하게) 집단 간에 이질성이 있어서 처치군과 통제군의 성과변수 간에 평균적으로 차이가 있다면 OLS 방법은 처치효과를 이러한 처치와 무관한 집단 간 이질성으로부터 별도로 추출하지 못하고 OLS 추정량은 편향된다.

다른 한편, 처치군에 소속된 개체들 각각에 대하여 처치 전후 자료가 관측된다면 연구자는 처치 전후를 비교함으로써 정책효과를 측정하는 것을 고려할 수도 있다(‘전후 비교’). 이는 처치군 소속 개체들에 대하여 Y를 정책개입 이후에 해당하는 더미변수(D)와 여타 통제변수에 대하여 OLS 회귀함으로써 구현할 수 있다. 이 방법과 앞의 횡단면 비교 간의 차이는, 앞의 횡단면 비교는 통제군(정책 적용을 받지 않은 개체들의 집단)을 대조군으로 사용했지만, 전후 비교는 처치군의 처치 이전 시점을 대조군으로 사용한다는 것이다. 전후 비교는 처치군 자료만을 사용하므로 처치군과 대조군 간 개체들의 성격 차이로 인한 이질성은 존재하지 않을 것이다. 하지만 전후 비교 시에는 불가피하게 처치군과 대조군 간 시기 차이로 인한 차이가 발생한다. 그리하여 시기 간 차이를 식별할 수 있는 방법이 있지 않은 한, 전후 비교의 방법은 정책효과를 시기 차이로부터 별도로 구별해 내지 못한다. 수학적으로, Y_{it} 를 처치군 개체 i의 t기 성과라 할 때 $Y_{it} = \alpha + \beta D_{it} + X_{it}\gamma + u_{it}$ 로 모형을 세우자(t는 1 또는 2). 단, D_{it} 는 $t = 1$ 이면 0이고 $t = 2$ 이면 1이다. 이 경우 X_{it} 를 통제한 상태에서 만약 u_{it} 가 두 기간 모두 동일한 평균을 갖는다면 D_{it} 와 u_{it} 간 상관이 없어 비편향 추정량을 얻으나, 만약 두 기간에 u_{it} 의 평균이 서로 다르면 설명변수와 오차항이 상관을 갖게 되어 OLS 추정량은 편향된다. 이 경우에도 만약 X_{it} 가 시간에 걸친 추세(정책과 무관한 추세)를 충분히 설명한다면 비편향성을 위한 조건을 충족하게 될 것이나, 앞의 횡단면 비교와 달리, 선형결합 $X_{it}\gamma$ 가 오차항의 시간추세를 정확히 중화시킬 것으로 기대하기는 어려울 것 같다.⁶⁾

앞의 ‘횡단면 비교’는 처치군과 통제군의 평균 Y 수준을 비교하는 방법이고, 전후 비교는 처치군의 처치 전후 평균을 비교하는 방법이다. 이중차분법은 처치군의 평균 증가분과 통제군의 평균 증가분을 비교하는 방법이다. 이는 오차항의 평균적인 증가 정도가

5) $E(u | D, X) = E(u | X) = X\delta$ 이면 X 변수의 계수는 편향되게 추정되나 D 계수의 OLS 추정량은 비편향이다. 만약 $E(u | X, D) = 0$ 이면 γ 도 편향되지 않게 추정한다.

6) 이는 γ 는 주로 개체들의 횡단면 차이를 이용하여 추정되는데 이 정보가 시간에 걸친 오차항의 추세와 정확히 일치할 개연성이 거의 없어 보이기 때문이다.

(X 통제 후에) 처치군과 통제군에서 동일하다는 가정하에 정책효과를 식별한다. 간단히 설명하여, X 통제 후에 처치군의 전후 평균 증분(관측됨)은 정책효과와 처치군의 정책과 무관한 시간추세의 합으로 구성될 것이고, 대조군의 전후 평균 증분(관측됨)은 통제군의 시간추세와 같을 것이다(통제군은 정책에 노출되지 않았으므로). 만약 처치군과 통제군의 시간추세가 동일하다고 가정하면 두 집단의 평균 Y 증분들의 차이는 정책효과와 같다. 처치군과 통제군의 시간추세가 동일하다는 가정은 ‘평행추세’(parallel trends) 가정이라 하며 DID 추정 결과를 정책효과로 해석하는 데 핵심적이다.⁷⁾ DID를 회귀로써 구현하는 방법은 Y를 처치군 더미, 처치 이후 더미, 이 두 더미변수의 상호작용항, 그리고 여타 통제 변수들에 대하여 회귀하는 것이다. OLS를 사용하는 경우 더미 상호작용항의 계수가 DID를 나타낸다. 예를 들어 피설명변수가 y, 공변량이 x1, x2, 처치군 더미변수가 tgroup, 처치 이후를 나타내는 더미변수가 after라 하면 다음 Stata 명령을 사용할 수 있다.

```
. reg y i.tgroup##i.after x1 x2, vce(cl id)
```

패널자료⁸⁾의 경우 양방향 고정효과(two-way fixed effects, TWFE) 회귀를 사용해서도 동일한 결과를 얻을 수 있다. 처치 더미변수(처치군 소속 개체들의 처치 이후 시점 값은 1, 나머지는 0)를 d라 하면(`gen d = tgroup*after`) 양방향 고정효과 회귀는 다음과 같이 구현할 수 있다.

```
. xtreg y d i.year x1 x2, fe vce(r)
```

위에서 year는 기간변수이다.

처치 이후 시점의 처치군과 통제군 횡단면 비교 방법은 통제군의 종속변수 값 수준을 비교의 기준으로 삼는 방법이다. 반면 DID 방법은 통제군의 증가분을 비교의 기준으로 삼는 방법이다. DID 방법은 또한 처치 이전 시점에 관측되는 두 집단의 차이를 처치와 무관한 것으로 받아들이고, 처치 이후에도 이 차이를 정상적인 차이로 인정하는 방식이

7) DID의 실제 적용 시에는 종속변수의 로그변환 여부에 따라 결과에 차이가 있을 수 있으며 경우에 따라 부호가 뒤바뀌기도 한다.

8) 패널자료와 분석에 관해서는 한치록·이윤석(2023), 한치록(2024b) 참조. 본 연구에서는 경우에 따라 한치록(2024b)의 내용을 별도 인용표시 없이 인용한다.

다.9) 횡단면 비교 방법은 이 그룹 간 차이가 0인 경우에 사용할 수 있는 방법이지만 DID는 그룹 간 차이를 자유롭게 두고 추정하므로 DID는 횡단면 비교 방식을 변형한 것이라 말할 수 있다.

앞에서 Stata의 reg를 사용하는 회귀와 xtreg, fe를 사용하는 회귀에 대하여 설명하였다. 패널자료의 경우 두 방법을 모두 사용할 수 있는데, 균형패널(balanced panel data)이면 두 결과는 전적으로 동일하다. 불균형패널(unbalanced panel) 자료의 경우에는 두 결과가 서로 다른데, 이는 reg 명령은 4개 구획(처치군 사후, 처치군 사전, 통제군 사후, 통제군 사전)별 평균을 먼저 구하고 이들 간 차이를 구하는 반면('평균 증가분의 차이'), xtreg, fe 명령은 개체(*i*)별 차이를 우선 구하고 이들 평균의 차이를 구하기 때문이다('증가분 평균의 차이'). 패널 TWFE 회귀에서는 양 기간 중 한 기간에만 관측되는 관측치가 삭제되므로 두 방법에 의한 결과에 차이가 발생한다.10)

패널자료를 이용하여 DID 회귀를 할 때 OLS를 사용하던 TWFE를 사용하던 오차항(idiosyncratic errors)에 시계열 상관성이 존재할 가능성을 허용해 주는 클러스터에 견고한 표준오차를 사용하는 것이 좋다. 현실에서, 원자료는 패널자료라는 것을 알지만 패널 식별 변수가 없으면 클러스터 표준오차 계산이 가능하지 않다. 이 경우, 만약 T 가 작다면 통상적인 표준오차에 최대 \sqrt{T} 를 곱하는 Moulton-type 교정을 적용할 수 있다(Cameron and Miller, 2015, 참조).

나. Card and Krueger(1994) 예제

Card and Krueger(1994)는 1992. 4월 뉴저지(NJ) 주의 최저시급 인상(\$4.25로부터 \$5.05로 인상)이 고용에 미치는 영향을 NJ주와 펜실베이니아(PA) 주 접경 지역 패스트푸드 점들의 정책 시행 직전과 직후 2기간 패널자료를 이용하여 DID 방법으로 추정하였다. 다음은 David Card가 제공하는 원자료11)를 분석에 편리하도록 정리한 자료12)를

9) DID를 $(d-b)-(c-a)$ 로 표현하자. d 는 처치군 처치 이후, b 는 처치군 처치 이전, c 는 통제군 처치 이후, a 는 통제군 처치 이전이다. 그러면 덧셈의 교환법칙과 결합법칙에 의해 DID는 $(d-c)-(b-a)$ 와도 동일한데, $d-c$ 는 처치 이후 시점의 그룹 간 차이, $b-a$ 는 처치 이전 시점의 그룹 간 차이이다. 즉, DID는 처치 이후 시점 그룹 간 차이에서 처치 이전 시점 그룹 간 차이를 차감한 것에 해당한다.

10) 대부분의 개체가 양 기간 모두에서 관측되면 둘의 차이는 보통 미미하다. 하지만 불균형 정도가 심하면 그 차이가 상당할 수도 있다. 이 경우 어느 편이 모집단을 더 잘 대표하는지가 판단의 기준이 될 것이다.

11) https://davidcard.berkeley.edu/data_sets.html, 검색일자: 2026. 1. 19.

12) 한치록(2024b) 참조, <https://github.com/chan079/panelbook/raw/main/data/fastfood.dta>, 검색일자: 2026. 1. 19.

이용한 분석 결과이다. 먼저 Stata의 reg 명령을 사용한 결과이다.

```
. use https://github.com/chan079/panelbook/raw/main/data/fastfood, clear
(Card and Krueger 1994, fastfood data, cleaned)

. reg fte nj##after, vce(cl id)

Linear regression                               Number of obs   =       794
                                                F(3, 409)       =       1.80
                                                Prob > F        =       0.1462
                                                R-squared       =       0.0074
                                                Root MSE       =       9.4056

                                                (Std. err. adjusted for 410 clusters in id)

+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
      fte      Coefficient      Robust      t      P>|t|      [95% conf. interval]
      +-----+-----+-----+-----+-----+
      1.nj      -2.891761      1.439546      -2.01      0.045      -5.721593      -.0619281
      1.after      -2.165584      1.218025      -1.78      0.076      -4.559954      .2287855

      nj#after
      1 1      2.753606      1.306607      2.11      0.036      .1851025      5.322109

      _cons      23.33117      1.346536      17.33      0.000      20.68417      25.97816
+-----+-----+-----+-----+-----+

```

위 결과에서 처치군 더미변수는 nj, 정책 시행 이후를 나타내는 더미변수는 after이다. nj#after 변수의 계수가 DID에 해당하는데, 그 추정값은 2.7536, 클러스터 표준오차는 1.0366, p값은 0.036이다. 좀 더 자세히 살펴보면, 먼저 nj변수의 계수는 after = 0, 즉 정책 시행 이전 시기에 PA 대비 NJ의 고용(full time equivalent, FTE) 정도이다. 그 추정치 -2.89는 정책 시행 이전에 NJ주 패스트푸드점들이 비교대상 PA주 패스트푸드 점들보다 2.89 FTE만큼 더 적게 고용하고 있었음을 뜻한다. 다음으로 after 더미변수의 계수는 NJ = 0, 즉 대조군의 전후 증가분을 나타낸다. NJ주 최저임금 인상 이전에 비하여 그 이후에 PA주의 FTE는 2.17명만큼 감소하였다. 위 결과들로부터 NJ주의 전후 증가분을 유추할 수 있다. PA주는 2.166명만큼 감소하였는데, NJ주의 증가분이 PA주의 증가분보다 2.754만큼 더 많으므로, NJ주는 $-2.166+2.754 = 0.588$ 명만큼 증가하였음을 알 수 있다. 달리 말하여, 비교대상 PA주에서는 2.166명만큼 감소했는데 NJ주에서는 0.588명만큼 증가했으므로, 그 차이인 +2.754가 정책의 효과라는 것이다.

다른 각도에서, 최저임금 인상 이전에는 NJ주가 PA주보다 2.892명만큼 적게 고용을 하고 있었다. 그런데 이 2개 주 간 차이가 최저임금 인상 이후에 2.754만큼 증가했다.

그러므로 NJ주와 PA주의 평균 고용은 최저임금 인상 이후에는 그 격차가 $-2.892+2.754 = -0.138$ 명으로 줄었다. 달리 말하여, 최저임금 인상 이전에 -2.892 명이었던 2개 인접 주 간 고용격차가 최저임금 인상 이후에 -0.138 명으로 변하였으므로, 그 차이인 $+2.754$ 가 정책의 효과라는 해석이다.

위 패널자료는 불균형패널이다. 그러므로 위 결과와 xtreg, fe를 이용한 패널 TWFE 추정 결과는 서로 다를 것이다.

```

. gen treat = nj*after
. xtreg fte treat i.after, fe vce(r)

```

Fixed-effects (within) regression
Group variable: id

Number of obs = 794
Number of groups = 410

R-squared:
Within = 0.0147
Between = 0.0043
Overall = 0.0000

Obs per group:
min = 1
avg = 1.9
max = 2

corr(u_i, Xb) = -0.0967
F(2, 409) = 2.14
Prob > F = 0.1185

(Std. err. adjusted for 410 clusters in id)

fte	Coefficient	Robust std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
treat	2.75	1.337555	2.06	0.040	.1206598	5.37934
1.after	-2.283333	1.247982	-1.83	0.068	-4.736592	.1699251
_cons	21.06045	.2281007	92.33	0.000	20.61206	21.50885
sigma_u	8.298003					
sigma_e	6.3411612					
rho	.63132515	(fraction of variance due to u_i)				

위에서 treat 변수가 처치 변수(D_{it})인데, 그 TWFE 계수 추정치는 2.75로 앞의 2.7536과 근소하게 다르다. 이는 패널자료가 불균형패널이기 때문이다. 만약 두 시점 모두에 관측이 이루어진 패스트푸드점들로 분석대상을 한정하면 앞의 OLS 추정 결과는 다음이 된다.

```
. reg fte nj##after if balanced, vce(cl id)
Linear regression      Number of obs   =      768
                      F(3, 383)           =      1.66
                      Prob > F           =    0.1763
                      R-squared          =    0.0076
                      Root MSE         =    9.5113

                      (Std. err. adjusted for 384 clusters in id)
```

fte	Coefficient	Robust std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
1.nj	-2.949417	1.478414	-1.99	0.047	-5.856241	-.0425943
1.after	-2.283333	1.248955	-1.83	0.068	-4.739	.1723333
nj#after 1 1	2.75	1.338598	2.05	0.041	.1180787	5.381921
_cons	23.38	1.382072	16.92	0.000	20.6626	26.0974

균형화를 하고 나면 계수 추정값이 2.75로 앞의 TWFE 결과와 정확히 일치한다. 하지만 표준오차에는 TWFE의 경우 1.337555이나 균형패널 사용 OLS의 경우 1.338598로 근소하게 다른데, 이는 Stata의 두 회귀에서 소표본 교정 방식이 약간 다르기 때문이다. 이를 확인해 보자. 다음은 두 회귀 간에 서로 정확한 대응이 이루어지도록 양 기간 모두 관측된 패스트푸드 점포들만을 이용한 회귀로부터 구한 분산 추정치들의 비율과 그 비율이 얻어지는 과정을 표시한다.

```
. qui reg fte treat nj i.after if balanced, vce(cl id)
. mat V1 = e(V)
. scalar N = e(N)
. qui xtreg fte treat i.after if balanced, fe vce(r)
. mat V2 = e(V)
. di V1["treat","treat"]/V2["treat","treat"]
1.0013089
. di V1["1.after","1.after"]/V2["1.after","1.after"]
1.0013089
. di (N-3)/(N-4)
1.0013089
```

위에서 V1은 OLS 분산 추정값이고 V2는 TWFE 분산 추정값이다. OLS 분산이 TWFE 분산의 1.0013089배(표준오차의 경우에는 제곱근)인데, 이는 소표본 교정에 기인한다. Stata 클러스터 표준오차의 소표본 교정 방식은 $[M/(M-1)] \cdot [(N-1)/(N-k)]$ 를 곱하는 것이다(Stata 매뉴얼 참조). 단, M은 클러스터 개수, 즉 패스트푸드 점포의 개수($M = 384$)이고 N은 전체 관측치수($N = 768$)이다. OLS와 TWFE 모두 M과 N은 동일하나 OLS는 k로 4를 사용하고 TWFE는 k로 3을 사용한다.¹³⁾ 그 결과 OLS의 분산 추정값은 TWFE의 분산 추정값의 $(N-3)/(N-4) = 1.0013089$ 배만큼이 된다. 그 제곱근은 1.0006542이고 OLS 표준오차들과 대응하는 TWFE 표준오차 간 비율이 정확히 그만큼인 것도 확인할 수 있다.¹⁴⁾

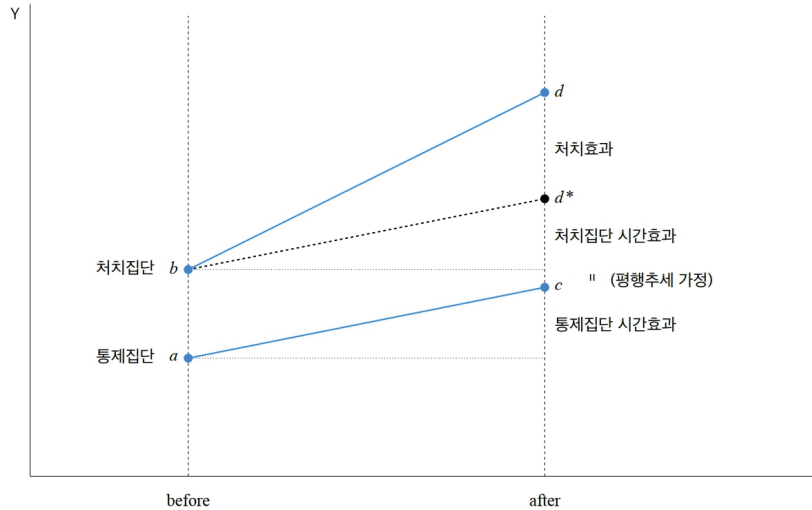
다. DID와 평행추세 가정

DID는 두 집단 증가분의 평균적인 차이를 정책효과로 간주한다. DID를 정책효과로 해석하기 위한 핵심적인 요구조건은 통제군의 증가분이 처치군의 처치와 무관한 증가분과 동일하다는 것, 즉 평행추세 가정이 성립한다는 것이다. 평행추세 가정과 DID를 이용한 정책효과 측정을 그림으로 표현하면 다음과 같다.

13) NJ 변수가 시간불변이어서 TWFE에서 사용되지 않기 때문이다.

14) 여기에는 한 가지 복잡한 점이 있는데, 'xtreg fte treat i.after, fe vce(r)'로써 추정하는 TWFE는 전체 410개 점포 중 1회만 관측된 26개 점포도 사용되는 것으로 간주하여 클러스터 개수를 410으로 하여 소표본 조정을 하지만, 'xtreg fte treat i.after if balanced, fe vce(r)'로써 추정하는 TWFE는 클러스터 개수를 384개로 간주하여 소표본 조정을 한다. 이에 따라 OLS와 TWFE 표준오차 간에 추가적인 차이가 발생한다. 한치록(2024b) 참조.

[그림 1-1] 평행추세 가정과 DID



자료: 한치록(2024a), <그림 11.2>; 한치록(2024b), <그림 4.1>.

위 그림에서 통제군 증가분 평균은 $c-a$ 이고 처치군 증가분 평균은 $d-b$ 이다. 평행추세 가정은 처치군에서 정책 이외의 요인으로 인한 평균 증가분이 통제군의 평균 증가분과 동일하다는 것이고, 통제군 평균 증가분을 처치군에 적용하면, 정책 이외의 요인으로 인한 사후시기 처치군 평균은 d^* 로 표시한 $b+(c-a)$ 이다. 그리고 $d-d^*=(d-b)-(c-a)$ 가 정책효과로 해석된다.

엄밀히 말하여 평행추세가 성립하는지 자료를 이용하여 확인할 방법은 없다. 이는 왜냐하면 정책 시행 이후에 처치군의 ‘정책이 없었다면 실현되었을 성과’(이하에서 Y^0 으로 표기)가 관측되지 않기 때문이다. 그 대신, 만약 정책 시행 이전에 여러 기간 자료가 있다면 그 기간 처치군과 통제군의 추세가 나란한지 점검해 볼 수 있다. 만약 정책 시행 이전에 두 집단의 추세가 나란했다면 정책 시행 이후 시기에도 Y^0 의 추세가 나란하였을 것이라는 주장이 힘을 얻는다. 물론 정책 시행 이전에 Y 의 추세가 나란하였다고 하여 정책 시행 이후에도 반드시 Y^0 의 추세가 나란하라는 법은 없다.

정책 시행 이전에 복수의 기간이 있을 때 사전 시기 평행추세를 검정한다는 것은 Y 를 ‘추세’에 의하여 설명하는 모형에서 추세 변수의 계수가 처치군과 통제군 간에 체계적인 차이가 없음을 검정하는 것이다. Stata의 `didregress`는 이를 위해 DID 추정을 위한 회귀식에 처치군의 사전시기 선형추세와 사후시기 선형추세 관련 변수를 각각 포함시키고, 처치군 사전시기 추세 변수의 계수가 0임을 검정하는 방법을 사용한다. 예를 들어

tgroup이 처치군변수, after가 사후시기변수, d를 처치변수라 할 때 xtreg y d i.year, fe vce(r)이라고 하면 d의 계수가 DID 모수가 되는데, 이 회귀에 다음과 같은 방식으로 변수 2개를 추가한다.

```
. xtreg y d i.year c.tgroup#c.year#i.after, fe vce(r)
```

그러면 after=0인 시기와 after=1인 시기에 tgroup과 year의 상호작용항 관련 통계들이 보고되는데, 그 중 after=0에 해당하는 결과 행에 기초하여 검정하는 것이다. 이 검정은 추세를 선형추세로 설정하며 귀무가설 내 제약의 개수는 1개이다.

다른 방법은 시기별로 처치군과 통제군 간 차이가 상이하도록 모형을 세우고 난 후, 사전시기에서 그 차이가 모두 동일하다는 귀무가설을 검정하는 것이다. 이를 위해 처치군 더미변수(tgroup), 기간별 더미변수(i.year), 처치군 더미변수와 기간별 더미변수들의 상호작용항을 포함하는 회귀를 하고 사전시기 해당 상호작용 항들의 계수가 모두 0임을 검정하는 것이다. Stata에서는 예를 들어 다음과 같이 할 수 있다.

```
. areg y tgroup##year, a(id) vce(cl id)
. testparm 1.tgroup#(2001.year 2002.year 2003.year)
```

위에서 year=2004부터 처치가 이루어진 상황을 상정하였다.

앞의 Card and Krueger(1994)의 데이터는 직전과 직후 2기간 데이터이므로 사전 시기 평행추세 검정은 가능하지 않다.

연구자들은 통상적으로 DID를 처치효과와 연결한다. 그런데 잠재성과변수 모형의 맥락에서 처치효과는 잠재성과 간의 차이이다. 처치를 받는 경우의 성과를 Y^1 이라 하고 처치를 받지 않는 경우의 성과를 Y^0 이라 하면 처치군이 처치를 받은 이후에 관측되는 성과는 Y^1 이고 통제군과 처치 이전 처치군에 관측되는 성과는 Y^0 이다. 처치효과는 $Y^1 - Y^0$ 이고 평균 처치효과는 이 처치효과들의 평균이다. 처치효과란 실제 관측된 성과에서의 차이를 의미하는 것이 아니다.

평균 처치효과를 구할 때는 어느 모집단에 대하여 평균을 구하느냐의 문제가 있다. 전체 모집단에 대하여 평균을 구한 것, 즉 $E(Y^1 - Y^0)$ 을 문헌에서는 보통 'ATE'로 표기

하고, 처치를 받은 단위들에서 처치효과들의 평균, 즉 $E(Y^1 - Y^0 | D = 1)$ 을 ‘ATT’, 처치를 받지 않은 단위들에서 처치효과들의 평균, 즉 $E(Y^1 - Y^0 | D = 0)$ 을 ‘ATU’라 표기한다.

2기간 자료의 DID가 측정하는 것이 ATE, ATT, ATU 중 어느 것인지 살펴보자. 처치군을 $j = 1$, 통제군을 $j = 0$ 으로 표기하고 사전시기를 $t = 0$, 사후시기를 $t = 1$ 이라 표기하고, μ_{jt} 를 j 군의 t 기 평균 성과변수 값이라 하면 DID는 $(\mu_{11} - \mu_{10}) - (\mu_{01} - \mu_{00})$ 을 측정한다. 그런데 처치를 받으면 Y^1 이 관측되고 처치를 받지 않으면 Y^0 이 관측되므로 $\mu_{11} = \mu_{11}^1$, $\mu_{10} = \mu_{10}^0$, $\mu_{01} = \mu_{01}^0$, $\mu_{00} = \mu_{00}^0$ 이 되어(단, μ_{jt}^1 은 처치 시의 평균 성과, μ_{jt}^0 은 비처치 시의 평균 성과를 의미함), DID가 측정하는 것은 $(\mu_{11}^1 - \mu_{10}^0) - (\mu_{01}^0 - \mu_{00}^0)$ 이다. 만약 ‘미처치 시 평균 성과’에 평행추세가 성립한다면, 즉 $\mu_{11}^0 - \mu_{10}^0 = \mu_{01}^0 - \mu_{00}^0$ 이라면, DID가 측정하는 것은 $\mu_{11}^1 - \mu_{11}^0$, 즉 처치군의 사후시기 평균 처치효과이다. 이것은 ATT에 해당한다. 요약하면, ‘미처치 시 성과’에 평행추세가 성립하면 DID는 ATT를 추정한다.

라. Stata (xt)didregress 명령

Stata 버전 18부터 DID를 간편하게 구현해 놓은 didregress와 xtdidregress 명령이 제공된다. 분석 자료로 지역(state)별 연도별로 복수의 개인들이 있는 자료(지역별 패널자료가 아니라, 동일 지역, 동일 연도 내에 복수의 개인이 관측되는 자료)를 상상해 보자. 다음 두 명령은 완전히 똑같으며, didregress는 areg ... 명령을 수행함과 동시에 (Stata 매뉴얼 참조), 이후에 다양한 통계치들을 보여주기 위해 결과를 저장해 두는 일을 한다.

```
. didregress (y x1 x2) (d), group(state) time(year)
. areg y x1 x2 i.year d, a(state) vce(cl state)
```

다음으로, 패널자료에서는 xtdidregress 명령을 사용할 수 있는데, 이를 위해서는 xtset이 필요하다. 개인 식별자(id)가 있으면 개인 ID를 사용하고 지역 식별자만 있으면 지역 ID를 사용해도 좋다.¹⁵⁾ 지역(state)별 패널자료의 경우 다음 두 명령은 동의어이다.

15) Stata에 패널 구조를 알려주는 xtset 명령은 두 가지 형태로 사용할 수 있다. 하나는 xtreg id 형태이고 다른 하나는 xtset id year 형태이다. 후자 형태를 사용하려면 (id, year) 셀에 하나의 관측치만 있어야

```
. xtdidregress (y x1 x2) (d), group(state) time(year)
. xtreg y x1 x2 i.year d, fe vce(cl state)
```

어느 명령이나 기간 더미변수를 통제하고 개별 didregress에서 사용되는 areg 명령에 id별 더미변수가 설명변수로 포함되어 있음을 알 수 있다. 패널자료(각 i 별로 기간마다 하나의 관측치가 있는 자료)의 경우 이를 더미변수 회귀(least squares dummy variables, LSDV)라고 하는데 결과가 고정효과 회귀와 동일하므로, 균형패널자료에서는 didregress와 xtdidregress 간에 차이가 없다. 단, didregress는 더미변수들을 포함시키고 xtdidregress는 집단 내 편차(within group deviations)를 구하여 회귀한다는 차이가 있다.

Stata 매뉴얼의 hospdd 자료를 사용한 예제를 다음에 제시한다. 46개 병원(hospital) 1~7월 환자들의 1~10점 척도 만족도(satis) 설문조사 자료이다. 성과변수는 satis이며 처치 더미변수는 신규 입원절차 적용 여부를 나타내는 procedure이다. procedure가 New이면 신규 절차이고 Old이면 기존 절차이다. 46개 병원 중 처음 18개 병원이 처치군이며 나머지 28개 병원은 통제군이다. 처음 10개 관측치는 다음과 같다.

```
. webuse hospdd, clear
(Artificial hospital admission procedure data)

. l in 1/10
```

	hospital	frequency	month	proced~e	satis
1.	1	High	July	New	4.106527
2.	1	Medium	March	Old	3.319475
3.	1	Very high	February	Old	3.41172
4.	1	Medium	April	New	3.004025
5.	1	Low	March	Old	3.11072
6.	1	Low	July	New	2.882164
7.	1	Medium	April	New	4.410257
8.	1	Very high	January	Old	2.902885
9.	1	Medium	March	Old	3.050226
10.	1	Medium	January	Old	2.438842

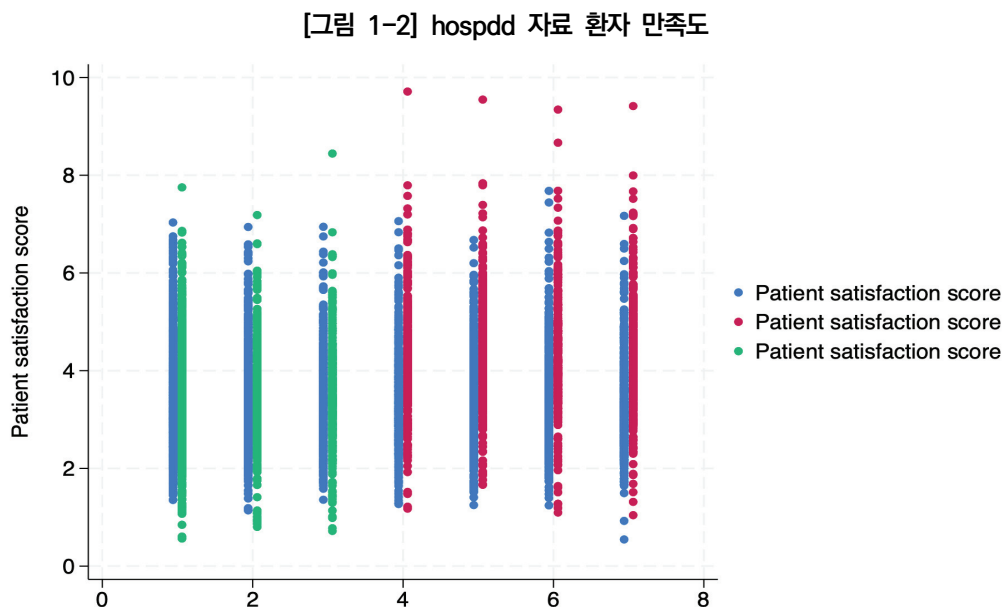
하며, 동적패널모형 등을 포함한 모든 패널 추정방법을 활용할 수 있다. 전자 형태는 지역 ID (state)는 있지만 개인 ID (id)는 없는 경우에도 xtset state와 같이 사용할 수 있으며, 몇 가지 추정을 할 수 있는데 xtreg, fe도 가능한 추정방법에 포함된다.

월별로 성과변수 그림을 그려 보자. 처치군(hospital = 1~18)과 통제군(hospital = 19~46) 소속 환자들의 만족도를 구분해서 그려 주는 것이 좋으므로 다음 코드를 사용한다.

```
. gen trgrp = hospital <= 18
. gen mon1 = month-0.06
. gen mon2 = month+0.06

. twoway (scatter satis mon1 if !trgrp) ///
> (scatter satis mon2 if trgrp & procedure==1) ///
> (scatter satis mon2 if trgrp & procedure==0)
```

결과는 다음과 같다.



자료: Stata의 hospdd.dta 자료로부터 저자 작성

그림에서 횡축은 월, 종축은 만족도이다. 통제군 환자들은 약간 왼쪽에 청색으로 그림을 그렸고 처치군 환자들은 약간 오른쪽에 녹색과 적색으로 그림을 그렸다. 1~3월은 처치 이전 기간, 4~7월은 처치 이후 기간에 해당한다. DID는 이들 점의 평균이 어떠한 패턴을 보이고, 처치 이전(1~3월)에 비하여 처치 이후(4~7월)에 처치군 평균과 통제군 평균 간 차이가 어떠한 변화를 보이는지 측정한다.

다음은 didregress 명령을 이용하여 평균 처치효과를 추정한다.¹⁶⁾

```
. didregress (satis) (procedure), group(hospital) time(month)

Treatment and time information

Time variable: month
Control:      procedure = 0
Treatment:    procedure = 1
```

	Control	Treatment
Group hospital	28	18
Time Minimum	1	4
Maximum	1	4

```
Difference-in-differences regression          Number of obs = 7,368
Data type: Repeated cross-sectional

              (Std. err. adjusted for 46 clusters in hospital)
```

satis	Coefficient	Robust std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
ATET procedure (New vs Old)	.8479879	.0321121	26.41	0.000	.7833108	.912665

```
Note: ATET estimate adjusted for group effects and time effects.
```

위 결과(끝에서 2번째 행)에 의하면 평균 처치효과는 약 0.85이며 이 효과는 통계적으로 유의하다($p=0.000$). 앞서 설명하였듯이 위와 동일한 결과를 다음과 같이 얻을 수 있다.

16) 본 보고서의 주제인 staggered adoption의 경우에는 hdidregress와 xthdidregress 명령이 있다. 이에 대해서는 나중에 설명한다. 지금의 hospdd 자료에서는 처치군의 모든 관측치가 동일한 시점에 처치를 받기 시작하므로 staggered adoption이 아니다.

```
. areg satis procedure i.month, a(hospital) vce(cl hospital)
```

```
Linear regression, absorbing indicators      Number of obs   = 7,368
Absorbed variable: hospital                No. of categories = 46
                                           F(7, 45)       = 138.73
                                           Prob > F       = 0.0000
                                           R-squared      = 0.5333
                                           Adj R-squared  = 0.5299
                                           Root MSE      = 0.7238
```

(Std. err. adjusted for 46 clusters in hospital)

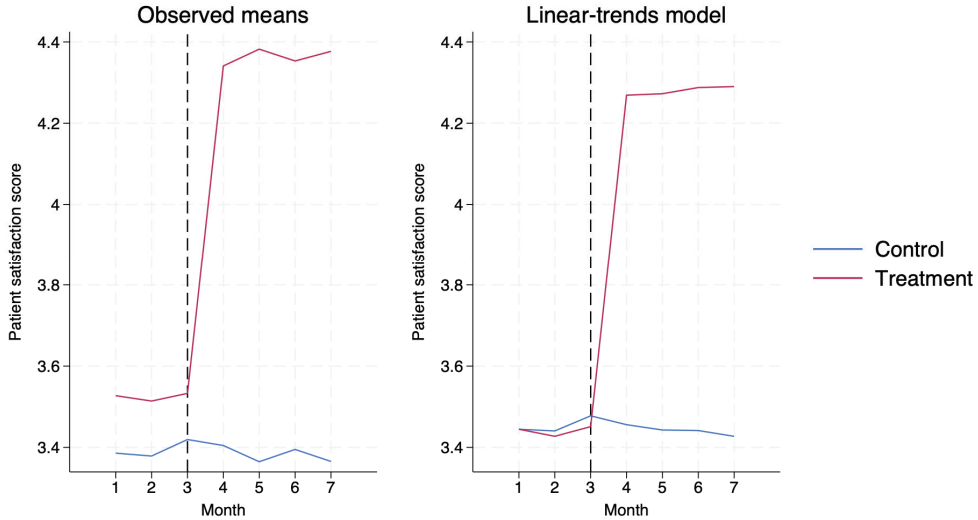
satis	Coefficient	Robust std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
procedure	.8479879	.0321121	26.41	0.000	.7833108	.912665
month						
February	-.0096077	.0184317	-0.52	0.605	-.0467311	.0275158
March	.0219686	.018251	1.20	0.235	-.0147907	.0587279
April	-.0032839	.0221028	-0.15	0.883	-.0478013	.0412335
May	-.0094027	.0232399	-0.40	0.688	-.0562103	.0374048
June	-.0038375	.0190634	-0.20	0.841	-.0422332	.0345581
July	-.0111941	.0230029	-0.49	0.629	-.0575244	.0351361
_cons	3.444675	.011354	303.39	0.000	3.421807	3.467543

위 결과에서 procedure 변수 관련 결과 행이 앞의 'didregress (satis) (procedure), group(hospital) time(month)' 명령에 따른 결과를 제공한다.

각 그룹의 월별 평균 성과변수 값의 시계열을 다음 그림으로 표시할 수 있다. 이 그림은 앞의 <그림 1-2>에서 월별·그룹별로 구한 평균 만족도를 나타낸 것이다.

```
. estat trendplots
```

[그림 1-3] 그룹별 평균 성과변수의 시계열



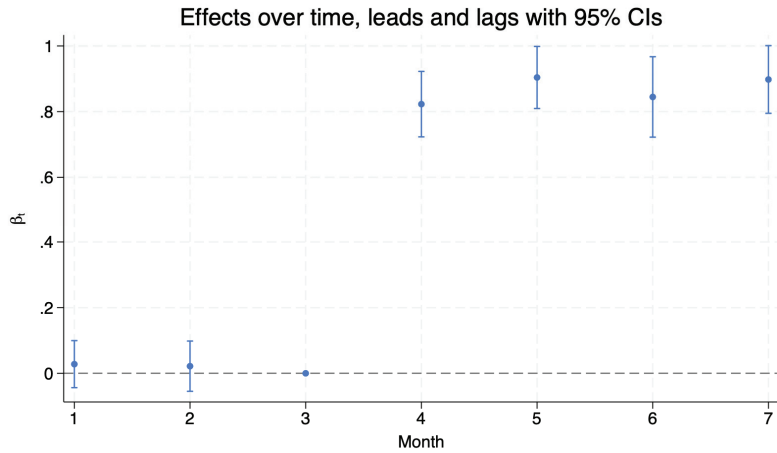
자료: 저자 작성

2개 그림 중 왼쪽은 satis 변수의 그룹별·시점별 평균을 나타내며 오른쪽 그림은 사전 시기(1~3월)와 사후시기(4~7월) 각각, 처치군과 통제군 각각 별도의 선형 추세(총 4개의 선형추세)를 허용하는 모형의 맞춘값(fitted values)을 그림으로 그리는데, 최초시기(1월)의 맞춘값이 두 그룹 간에 동일하도록 세로 위치를 조정한 것이다(Statalist 참조). 참고로, 왼쪽 그림은 ‘didregress’ 명령 이후에 ‘estat trendplots, omeans’으로 별도로 그릴 수 있고, 오른쪽 그림은 ‘estat trendplots, ltrends’으로써 그릴 수 있다. ‘estat trendplots’는 위와 같이 둘 다 그려준다.

처치 이전과 처치 이후에 두 그룹 간 평균 만족도 차이를 그림으로 표시할 수 있다. 단, 처치직전시점(3월)을 0으로 설정하여, 3월 대비 만족도에 얼마나 차이가 있는지 보여준다. 즉, t 시점 그룹 간 차이에서 3월의 그룹 간 차이를 뺀 값(3월 대비 DID)이다.

```
. qui didregress (satis) (procedure), group(hospital) time(month)
. estat grangerplot
```

[그림 1-4] 그룹 간 평균의 차이



주: 3월은 0으로 설정됨.
 자료: 저자 작성

그림에 필요한 통계치와 신뢰구간은, 피설명변수인 *satis*를 종속변수로 하고, 처치군 더미변수(*gen trgrp = hospital ≤ 18*), 월 더미변수, 3월을 기준으로 한 월 더미변수와 처치군 더미변수의 상호작용항을 설명변수로 하며, 병원 더미변수들을 통제변수로 포함한 회귀분석을 통해 산출할 수 있다.

```

. * gen trgrp = hospital <= 18
. areg satis i.month c.trgrp#i(1 2 4/7).month, a(hospital) vce(cl hospital)
    
```

Linear regression, absorbing indicators
 Absorbed variable: hospital

Number of obs = 7,368
 No. of categories = 46
 F(12, 45) = 94.68
 Prob > F = 0.0000
 R-squared = 0.5334
 Adj R-squared = 0.5298
 Root MSE = 0.7240

(Std. err. adjusted for 46 clusters in hospital)

satis	Coefficient	Robust std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
month						
February	-.007044	.0263953	-0.27	0.791	-.0602068	.0461188
March	.0335696	.0255925	1.31	0.196	-.0179764	.0851156
April	.0187852	.0250623	0.75	0.457	-.0316927	.0692632
May	-.0211152	.0269569	-0.78	0.438	-.0754092	.0331788
June	.0091208	.0179016	0.51	0.613	-.026935	.0451766

July	-.0203444	.0306266	-0.66	0.510	-.0820296	.0413407
month#						
c.trgrp						
January	.027897	.035569	0.78	0.437	-.0437426	.0995367
February	.0217322	.0380076	0.57	0.570	-.054819	.0982833
April	.8228153	.0494933	16.62	0.000	.7231307	.9224999
May	.9040498	.0469682	19.25	0.000	.8094511	.9986486
June	.844724	.0608006	13.89	0.000	.7222654	.9671826
July	.8978885	.0511588	17.55	0.000	.7948494	1.000928
_cons	3.433074	.0198449	173.00	0.000	3.393104	3.473044

위 결과에서 상호작용항들의 계수 추정값(March는 0)과 신뢰구간을 그림으로 표시한 것이 위 estat grangerplot으로 그린 그림이다.

사전시기 추세가 동일하였는지 검정하고자 할 때 앞의 'estat grangerplot' 결과 그림에서 1~2월의 95% 신뢰구간이 0을 포함하는지를 그래프를 통해 직관적으로 점검하는 방식이 널리 활용된다. 이를 더 엄밀하게 검정하고자 한다면 위 명령 후 'testparm c.trgrp#i(1 2).month'로써 F검정을 할 수 있다.

```
. testparm i(1 2).month#c.trgrp

( 1) 1b.month#c.trgrp = 0
( 2) 2.month#c.trgrp = 0

F( 2, 45) = 0.33
Prob > F = 0.7240
```

위 결과에 의하면 1, 2, 3월 그룹 간 평균 성과변수의 차이가 모두 동일하다는 귀무가설이 기각되지 않는다.

그 외에 Stata의 'estat ptrends' 명령을 사용하는 방법이 있는데, 이는 앞서 설명한 바와 같이, 성과변수를 종속변수로 하고, 처치 더미변수, 월별 더미변수, 병원별 더미변수, 그리고 처치 전·후 시기 각각에 대해 처치군 더미변수와 선형추세 변수의 (삼중)상호작용항을 설명변수로 포함한 회귀모형을 추정한 후, 처치 이전 더미·선형추세 변수의 상호작용항 계수를 확인하는 것과 동일하다.

```

. qui didregress (satis) (procedure), group(hospital) time(month)

. estat ptrends

Parallel-trends test (pretreatment time period)
H0: Linear trends are parallel

F(1, 45) = 0.55
Prob > F = 0.4615

. * gen trgrp = hospital <= 18
. gen post = month >= 4

. areg satis procedure i.month c.trgrp#i.post#c.month, a(hospital) vce(cl
hospital)

Linear regression, absorbing indicators
Absorbed variable: hospital
Number of obs = 7,368
No. of categories = 46
F(9, 45) = 108.52
Prob > F = 0.0000
R-squared = 0.5333
Adj R-squared = 0.5299
Root MSE = 0.7239

```

(Std. err. adjusted for 46 clusters in hospital)

satis	Coefficient	Robust std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
procedure	.7335747	.0889648	8.25	0.000	.5543904	.912759
month						
February	-.0041014	.0213625	-0.19	0.849	-.0471278	.038925
March	.0329811	.025794	1.28	0.208	-.0189706	.0849328
April	.0111939	.0228129	0.49	0.626	-.0347537	.0571415
May	-.0018237	.024343	-0.07	0.941	-.050853	.0472057
June	-.0031572	.018866	-0.17	0.868	-.0411554	.0348409
July	-.0174126	.0264658	-0.66	0.514	-.0707175	.0358924
post#						
c.trgrp#						
c.month						
0	-.0132409	.017828	-0.74	0.462	-.0491483	.0226665
1	.0165894	.0136868	1.21	0.232	-.0109772	.044156
_cons	3.450181	.0125937	273.96	0.000	3.424816	3.475546

단일 제약(사전기간 선형추세가 처치군과 통제군 간에 동일하다는 제약) 검정 통계값은 0.55, p값은 0.4615이며, 사전추세가 동일하다는 귀무가설은 기각되지 않는다. 이와 결과는 두 번째 areg 회귀에서 0.post#c.trgrp#c.month 해당 행(계수 추정값이 -.0132409인 행)의 결과와 동일하다. F 통계는 t 통계의 제곱과 동일하며, 실제로 -0.74

의 제곱은 0.55이다. p값은 두 결과에서 서로 동일하다.

문헌에서 사용하는 사전시기 평행추세 검정 방법에 대해서는 Roth (2022)의 서베이를 참조할 수 있다. Roth (2022)의 Table 1에 $|t|$ 의 최댓값, 결합 귀무가설 검정의 p 값, 선형추세모형에서의 $|t|$ 등이 고려되어 있다. Roth (2022)의 B절에 의하면 저자가 검토한 12개 논문 중 5개는 개별 유의성을 논의하고, 그 중 1개 논문은 결합 p 값을 이용하여 검정하고, 여러 논문은 그림을 시각적으로 검토하는 방법을 사용하였다고 한다.

3. 복수 기간 자료에서 TWFE와 DID

다기간 자료가 있을 때 앞에서 `didregress(areg해당)` 또는 `xtdidregress(xtreg, fe해당)`를 이용하여 DID에 해당하는 값을 처치터미, 기간터미 및 그룹터미에 대하여 회귀함으로써 구하는 것을 앞에서 보았다. 그런데 기간이 복수이면 2기간 DID가 여럿 나올 수 있다. 예를 들어 앞의 `hospdd` 자료의 경우처럼 처치 이전에 3개 기간이 있고 처치 이후에 4개 기간이 있으면 총 $3 \times 4 = 12$ 개의 2기간 DID가 구해진다.¹⁷⁾ 이 경우 이들 12개 DID 추정값과 `didregress` 또는 `xtdidregress`로써 구한 1개의 정책효과 추정값은 어떤 관계가 있는지 알아보는 것이 본 소절의 목적이다.

우선 가장 단순하게 $T=3$ 예를 보자. 2개 그룹($g = 1, 0$)과 3기간($t = 0, 1, 2$)이 있다. 그룹 1은 처치군이며, 1, 2기가 처치 상태이다. 그룹 0은 처치를 받지 않았다(통제군). 처치 터미변수 D 는 $g=1$ 이고 $t \geq 1$ 이면 1값을 가지고 그렇지 않으면 0값을 가진다. 그룹 1에는 n_1 명의 개인이 있고 그룹 0에는 n_0 명의 개인이 있으며 $n = n_1 + n_0$ 이다. 개인들이 모두 식별되는 균형패널자료가 있다고 하고 통제변수는 없다고 하자.

균형패널에서 기간 및 개인 터미변수들을 포함하고 회귀하는 것은 양방향 집단 내 편차를 구하여 OLS를 하는 것과 동일하다. D 변수의 양방향 집단 내 편차를 구하기 위해 개인별 D 의 평균을 구하면, 처치군 내에서는 $2/3$ 이고 통제군 내에서는 0이다. D 의 기간별 평균은 사전 기간에는 0, 사후 기간에는 $a_1 \equiv n_1/n$ 이다. 전체 평균은 $(2n_1)/(3n) = (2/3)a_1$ 이다. 그러면 개인별로 D 의 양방향 집단내 편차(\tilde{D})는 다음과 같다.

$$\text{사전기간 통제군: } (2/3)a_1$$

$$\text{사후기간 통제군: } -a_1 + (2/3)a_1 = -(1/3)a_1$$

17) 1월과 4월, ..., 1월과 7월, 2월과 4월, ..., 2월과 7월, 3월과 4월, ..., 3월과 7월 등 12개 DID가 가능하다.

사전기간 처치군: $-2/3 + (2/3)\alpha_1 = -(2/3)(1 - \alpha_1) = -(2/3)\alpha_0$

사후기간 처치군: $1 - 2/3 - \alpha_1 + (2/3)\alpha_1 = (1/3)(1 - \alpha_1) = (1/3)\alpha_0$

단, $\alpha_0 = 1 - \alpha_1$ 이다. 최종 TWFE 추정량은 $\tilde{D}_{it}Y_{it}$ 의 합계를 $\tilde{D}_{it}D_{it}$ 의 합계로 나눈 값과 같다. 실제로 계산해 보면, μ_{gt} 가 g 그룹의 t 기 평균 Y 값이라 할 때, 다음이 된다.

$$\begin{aligned} TWFE &= \frac{n_0(2/3)\alpha_1\mu_{00} - (1/3)\alpha_1(n_0\mu_{01} + n_0\mu_{02}) - n_1(2/3)\alpha_0\mu_{10} + (1/3)\alpha_0(n_1\mu_{11} + n_1\mu_{12})}{2n_1(1/3)\alpha_0} \\ &= \mu_{00} - \frac{1}{2}(\mu_{01} + \mu_{02}) - \mu_{10} + \frac{1}{2}(\mu_{11} + \mu_{12}) \\ &= \frac{1}{2}\{[(\mu_{11} - \mu_{10}) - (\mu_{01} - \mu_{00})] + [(\mu_{12} - \mu_{10}) - (\mu_{02} - \mu_{00})]\} \end{aligned}$$

다시 말하여 TWFE는 0기와 1기를 사용하는 DID 추정량과 0기와 2기를 사용하는 DID 추정량의 산술평균이다.

앞에서는 사전기간이 1개, 사후기간이 2개인 경우에 대하여 수학적으로 도출하였으나 균형패널이기만 하면 사전 및 사후기간 수가 일반적인 경우에도 동일한 법칙이 성립한다. 다음 예는 사전기간 3개, 사후기간 2개인 경우를 고려한다.

```

1. . use https://friosavila.github.io/playingwithstata/drddid/mpdta.dta, clear
2. (Written by R. )
4. . xtset countyreal year

6. Panel variable: countyreal (strongly balanced)
7. Time variable: year, 2003 to 2007
8. Delta: 1 unit

10. . keep if inlist(first_treat, 2006, 0)
11. (755 observations deleted)

13. . * pretreatment: 2003-2005, posttreatment: 2006-2007
14. . gen d = treat & year >= first_treat

16. . xtreg lemp d i.year, fe vce(r)

18. Fixed-effects (within) regression      Number of obs   =      1,745
19. Group variable: countyreal            Number of groups =       349

21. R-squared:                            Obs per group:
22.   Within = 0.0411                      min =           5
23.   Between = 0.0377                     avg =          5.0
24.   Overall = 0.0000                      max =           5

```

```

26.                                     F(5, 348)      =      15.37
27. corr(u_i, Xb) = -0.0213             Prob > F        =      0.0000
29.                                     (Std. err. adjusted for 349 clusters in countyreal)
30.
31.
32.      lemp      Coefficient      Robust      t      P>|t|      [95% conf. interval]
33.      -----
34.      d          -.02257      .0208479      -1.08      0.280      -.0635737      .0184336
35.
36.      year
37.      2004      -.0618827      .009023      -6.86      0.000      -.0796292      -.0441363
38.      2005      -.0493896      .009836      -5.02      0.000      -.0687351      -.0300441
39.      2006      -.0132415      .0142195      -0.93      0.352      -.0412085      .0147255
40.      2007      .0047965      .014286      0.34      0.737      -.0233012      .0328942
41.
42.      _cons      5.760001      .007875      731.43      0.000      5.744513      5.77549
43.
44.      sigma_u      1.5012549
45.      sigma_e      .14237791
46.      rho          .99108569      (fraction of variance due to u_i)
47.
49. . mat l e(b)
51. e(b)[1,7]
52.      2003b.      2004.      2005.      2006.      2007.
53.      d          year      year      year      year      year
54. y1  -.02257005      0  -.06188273  -.04938958  -.01324151  .00479649
56.
57.      _cons
58. y1  5.7600012

```

데이터는 2003-2007년 패널 데이터이고 관측치들은 2004년 처치 개시 그룹, 2006년 처치 개시 그룹, 2007년 처치 개시 그룹, 미처치 그룹으로 분류되나, 2006년에 처치가 시작된 그룹과 미처치 그룹만 남기고 나머지는 지운다(10행). 그러면 처치군은 2006년 그룹, 대조군은 미처치 그룹이 되고, 사전시기는 2003~2005년(3개 연도), 사후시기는 2006~2007년(2개 연도)이다. 이 자료에 TWFE를 적용(16행)하면 추정값은 34행의 -.02257이고, 소수점 아래 여덟째 자리까지 표시하면 54행의 -.02257005이다.

이 데이터(사전시기 3개, 사후시기 2개)로부터 구할 수 있는 2x2 DID의 개수는 총 6개이다. 2기간 조합별로 DID 추정값들을 구하면 다음과 같다.

```

1. . mat did = J(3,2,.)
3. . forv s=2003/2005 {
4.   2.      forv t=2006/2007 {

```

```

5. 3. *qui areg satis procedure i.month if inlist(month, `s',
`t'), a(hospital) vce(c1 hospital)
6. . qui xtreg lemp d i.year if inlist(year, `s', `t'), fe vce(r)
7. 4. mat b = e(b)
8. 5. mat did[`=s'-2002',`=t'-2005'] = b[1,1]
9. 6. }
10. 7. }

12. . mat l did

14. did[3,2]
15. c1 c2
16. r1 -.00082531 -.03745518
17. r2 -.00734543 -.04397529
18. r3 -.00459461 -.04122447

```

위에서 'did'라는 3×2 행렬에 DID 추정값들이 저장되어 있다. did 행렬의 3개 행 (r1, r2, r3)은 사전연도를 2003, 2004, 2005년으로 할 때를 각각 나타내고 2개 열(c1, c2)은 사후연도를 2006, 2007년으로 할 때를 나타낸다. 이들 6개 DID 추정값들의 산술평균은 다음과 같다.

```

. mata: mean(vec(st_matrix("did")))
-.0225700476

```

소수점 아래 여덟째 자리까지 반올림한 값은 앞에서 TWFE로 구한 값과 완전히 동일하다. 균형패널자료(개체 식별이 가능한 자료)의 경우 TWFE는 가능한 모든 2x2 DID 추정값들의 산술평균과 동일하다.

패널자료가 아니거나(예를 들어 앞의 hospdd) 불균형패널자료인 경우 구획마다 표본 크기가 달라 이 등식이 일반적으로 성립하지 않으나 그 경우에도 더미변수 추정량이나 TWFE 추정량은 2x2 DID 추정량들의 가중평균으로 표현되고 가중치는 결코 음(-)이 되지 않는다(아래 보론 참조). 처치가 동시에 이루어지면 그룹별·시기별로 효과가 상이하더라도 더미변수 추정은 일종의 가중평균 처치효과를 측정해 주므로 해석이 타당성을 갖는다.

공변량이 있으면 Y 대신에 $Y - X\hat{\beta}$ 를 사용하여 위와 유사한 방식으로 추론할 수 있다.

[보통] 일반적인 경우 수학

$t = -T_0 + 1, \dots, 0$ 는 처치 이전 기간, $t = 1, \dots, T_1$ 은 처치 이후 기간이라 하자. 2개 그룹이 있다($j = 1, 0$). $j = 1$ 은 처치군, $j = 0$ 은 통제군이다. n_{jt} 를 j 그룹 t 기 관측치수라 하자. \tilde{D}_{jt} 를 양방향 평균제거한 j 그룹 t 기 처치 더미변수라 하자. 그러면 모든 t 에서 $n_{1t}\tilde{D}_{1t} + n_{0t}\tilde{D}_{0t} = 0$ 이다. 더미변수 추정량의 분자는 $n_{1t}\tilde{D}_{1t}\mu_{1t} + n_{0t}\tilde{D}_{0t}\mu_{0t}$ 의 합계인데 앞의 등식을 이용하면 이는 $n_{1t}\tilde{D}_{1t}(\mu_{1t} - \mu_{0t})$ 의 합계이다. 분모까지 고려 하면,

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{t>0} n_{1t}\tilde{D}_{1t}(\mu_{1t} - \mu_{0t}) + \sum_{s\leq 0} n_{1s}\tilde{D}_{1s}(\mu_{1s} - \mu_{0s})}{\sum_{t>0} n_{1t}\tilde{D}_{1t}}$$

그룹별로 $\sum_{t=-T_0+1}^{T_1} n_{jt}\tilde{D}_{jt} = 0$ 이므로 $j = 1$ 의 경우 $\sum_{s\leq 0} n_{1s}\tilde{D}_{1s} = -\sum_{t>0} n_{1t}\tilde{D}_{1t}$ 임에 유의하라. 또한 $t > 0$ 일 때 $\tilde{D}_{1t} > 0$ 이고 $s \leq 0$ 일 때 $\tilde{D}_{1s} < 0$ 이므로 추정량은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{\theta} = \sum_{t>0} p_t(\mu_{1t} - \mu_{0t}) - \sum_{s\leq 0} q_s(\mu_{1s} - \mu_{0s})$$

단, $p_t = n_{1t}\tilde{D}_{1t}/den \geq 0$, $q_s = -n_{1s}\tilde{D}_{1s}/den \geq 0$, den 은 위의 분모이고, $\sum_{t>0} p_t = \sum_{s\leq 0} q_s$ 가 성립한다. p_t 와 q_s 를 각각 적절하게 분할하면 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{\theta} = \sum_{s\leq 0} \sum_{t>0} w_{st}[(\mu_{1t} - \mu_{0t}) - (\mu_{1s} - \mu_{0s})], \quad w_{st} \geq 0$$

w_{st} 가 갖춰야 할 조건은 각각의 t 와 s 에서 $\sum_{s\leq 0} w_{st} = p_t$, $\sum_{t>0} w_{st} = q_s$ 이라는 것이며, p_t 와 q_s 가 모두 비음이므로 비음 w_{st} 가 존재한다(w_{st} 행렬에서 행합계의 합과 열합계의 합이 동일하므로, 이는 2변수 한계 확률분포들로부터 결합 확률분포를 역으로 유추하는 것에 해당하며, 가장 간편한 방법은 p_1, \dots, p_{T_1} 의 비율에 따라 q_s 를 분할하여 w_{st} 를 구성하는 것, 즉 $w_{st} = q_s p_t / (p_1 + \dots + p_{T_1})$ 로 설정하는 것으로서, 확률적 독립을 가정하는 것과 유사하다). 즉, 더미변수 추정량은 2x2 DID 추정량들의 가중평균이고 가중치는 모두 비음이다.

4. 소결

이 절에서는 처치군에 대한 처치가 동시에 적용되는 경우를 살펴보았다. 2기간 데이터라면 단 하나의 2x2 DID가 가능하다. 복수의 처치 이전 기간이 있으면 사전시기 행추세 성립 여부를 점검해 볼 수 있다. 복수개의 사전 및 사후기간이 존재하면 $T_0 \times T_1$ 개의 2x2 DID가 도출되고(단, T_0 은 사전기간 개수, T_1 은 사후기간 개수), 통상적으로 사용하는 양방향 더미변수 회귀(didregress, xtdidregress, areg, xtreg 등 이용)는 이들 복수의 DID 추정량들에 대한 일종의 가중평균을 추정해 준다. 처치가 동시에 이루어질 때 음(-)의 가중치 문제는 발생하지 않으며, 따라서 해석 문제가 야기되지 않는다.

1. 도입

가. 정책의 점진적 도입(Staggered Adoption)

I장에서는 처치군에 대한 처치가 동시에 적용되는 경우를 살펴보았다. 본 장에서는 정책이 모든 집단에서 동시에 시행되지 않고 점진적으로 시행되는 경우를 살펴본다. 다음 표에 정책의 동시 적용과 점진적 적용의 차이가 예를 들어 제시되어 있다. 표에 그룹 별·기간별로 처치 더미변수(D) 값이 기재되어 있다.

〈표 1-1〉 정책의 동시 적용과 점진적 적용의 예

(a) 동시 적용				(b) 점진적 적용			
D	그룹 A	그룹 B	그룹 C	D	그룹 A	그룹 B	그룹 C
t=1	0	0	0	t=1	0	0	0
t=2	0	0	0	t=2	0	0	0
t=3	1	1	0	t=3	1	0	0
t=4	1	1	0	t=4	1	1	0
t=5	1	1	0	t=5	1	1	0

주: (a)에서 그룹 A와 B는 동시에 처치가 시작되는 반면, (b)에서는 그룹 A와 그룹 B가 정책 적용을 받기 시작하는 시점이 다르다.

자료: 저자 작성

위 표 (a) 동시 적용의 경우 처치군 A와 B는 모두 3기부터 처치가 이루어지고 그룹 C는 통제군이다. (b) 점진적 적용의 경우에는 그룹 A는 3기부터 처치가 이루어지나 그룹 B는 4기부터 처치가 이루어진다. 그룹 C는 통제군이다.

정책이 동시에 적용되지 않고 점진적으로 적용되는 경우 양방향 더미변수 회귀나 TWFE에 특이한 문제가 발생할 수 있다. 이 문제를 문헌에서는 ‘음(-)의 가중치 문제’ 또는 ‘금지된 비교(forbidden comparison)’라 한다. 이 장에서는 이 음(-)의 가중치 문제를 설명한다. 음의 가중치 문제를 해결하는 다양한 시도들에 대해서는 다음 III장에서 설명한다. 본 장의 논의에서는 패널 데이터가 가용이라 가정한다.

나. 문헌 정리

이 소절에서는 정책의 점진적 도입과 관련된 방법론, Stata 패키지, 이들을 이용한 최근 응용연구를 간략하게 소개한다. 방법론과 Stata 패키지에 관해서는 아래 III장에서 상세히 살펴본다.

1) 방법론 관련 문헌

방법론과 관련하여 de Chaisemartin and D'Haultfoeuille(2020, CH), Callaway and Sant'Anna(2021, CS), Goodman-Bacon(2021), Sun and Abraham(2021, SA), Athey et al.(2021), Bai and Ng(2021), Callaway and Karami(2022), Wooldridge(2023), Rambachan and Roth(2023), Borusyak et al(2024, BJS) 등이 있다.

2) Stata 패키지

Stata 패키지로 대략 다음이 있다. csdid(CS 2021), jwdid(Wooldridge 2021), eventstudyinteract(SA 2021), did_multplegt(CH 2020), TwoWayFEWeights(CH 2020), xtevent(FH 2019), ddtiming(G-B 2021), flexpaneldid(D 2020), did_imputation(BJS 2024), honestdid(RR 2023). 이 중 csdid가 널리 사용되며, Stata 18 이후 버전에서는 csdid와 jwdid를 모두 지원하는 hdidregress와 xthdidregress 명령이 제공된다.

3) 응용연구¹⁸⁾

Brynjolfsson, Li, and Raymond(2025)는 BJS, CH, CS, SA(eventstudyinteract)의 방법들을 이용하여 생성형 AI 보조의 도입이 노동자의 생산성에 미치는 영향을 추정한다. Kim(2025)는 BJS의 방법을 이용하여 정책의 점진적 도입 상황에서 우리나라의 무상급식 정책이 학생들의 학업성취도에 미치는 영향을 추정한다. 박상곤(2025)은 SA의 방법을 적용해 과학관 건립이 지역소득과 고용에 미치는 영향을 분석한다. 김슬기·김의준(2025)은 CS의 방법을 이용하여 투기과열지구의 단계적 지정 및 해제 정책이 우리나라

18) 이 소절과 관련하여 한국문화관광연구원 박상곤 박사의 도움에 감사한다.

라 주택시장에 미친 영향을 분석한다. 김명진·박남태(2025)는 CS의 방법을 이용하여 스마트공장 도입에 대한 정책자금 지원이 매출액 등 경영성과에 미치는 영향을 추정한다. Horton et al.(2024)은 미국 조지아(Georgia)주의 33개 카운티가 1999년부터 2008년 사이에 시차를 두고 순차적으로 도입한 재산세 과세표준 동결 정책이 주택가격에 미치는 영향을 CS와 SA의 방법을 이용하여 분석한다. Borusyak et al.(2024)은 자신들의 방법을 이용하여 2008년 미국의 경기부양 세금 환급(tax rebates) 정책의 효과를 재분석한다. Lee et al.(2024)은 CS의 방법을 이용하여 공공기관 이전이 고용에 미치는 영향을 추정한다. Kong and Liu(2024)는 BJS, CH, CS, SA의 방법을 이용하여 공무원 인사개혁이 정부의 처별건수 및 총 벌금액에 미치는 영향을 분석한다. Nguyen et al.(2024)은 BJS의 방법을 이용하여 러시아의 기업들에 대한 제재의 기업 주식 수익률에 대한 효과를 분석한다. 정근주(2024)는 CS의 방법을 이용하여 구조조정 지원정책이 기업의 생산성에 미치는 영향을 추정한다. Cloud, Heß, Kasinger(2023)는 BJS(did_imputation), CS(csdid)의 방법을 이용하여 전동 스쿠터의 도입이 교통사고율에 미치는 영향을 추정한다. East et al.(2023)은 CS(csdid)의 방법을 이용하여 이민 단속 정책이 이민자 및 미국 시민권자들의 고용과 임금에 미친 영향을 추정한다. Liu et al.(2023)은 BJS, CH, CS, SA의 방법들을 이용하여 토지소유권 개혁이 산업 간 인적자본 이동과 농업생산성에 미치는 영향을 추정한다. McMichael(2023)은 BJS, CS의 방법을 이용하여 의료 접근성이 환자 사망률에 미치는 영향을 추정한다. Zhang(2023)은 BJS(did_imputation)의 방법을 이용하여 반부패 정책이 정경유착 기업의 승소율에 미치는 영향을 추정한다. 고희진·정해식(2023)은 CS의 방법을 이용하여 주 40시간 근로제와 주 52시간 근로상한제 도입이 근로자의 삶과 직업 만족도에 미친 영향을 추정한다. Autor et al.(2022)은 SA(eventstudyinteract)의 방법을 이용하여 급여보호프로그램(Paycheck Protection Program)이 소규모 기업의 고용에 미친 영향을 추정한다. Biasi and Sarsons(2022)는 BJS, RR, SA의 방법을 이용하여 유연임금제 도입이 성별 임금격차에 미친 영향을 추정하고 강건성을 확인한다. Boone et al.(2022)은 CH의 방법을 이용하여 의료서비스 예약 알람 서비스가 환자들의 병원 방문 횟수에 미친 영향을 분석한다. Braghieri et al.(2022)은 BJS(did_imputation), CH(did_multiplegt), CS(csdid), SA(eventstudyinteract)의 방법을 이용하여 소셜미디어가 정신건강에 미치는 영향을 추정한다. Fang and Zhu(2022)는 BJS의 방법을 이용하여 영양 개선 프로그램이 아동과 청소년의 인지능력 및 건강에 미치는 영향을 추정한다. Ortega(2023)는 BJS, CS의 방법을 이용하여 Medicaid 확장이 의료서비스 이용에 미친 영향을 추정한다. 강창희·박

상곤(2025)의 IV장에도 저자들의 예제가 제시되어 있다.

2. 잘못 설정된 모형의 TWFE 추정과 관련된 문제

처치시점이 처치그룹 간에 상이할 때 TWFE의 문제점에 대해서는 de Chaisemartin and D’Haultfoeuille(2020)이 간단한 모형에 관하여 설명하였고 Goodman-Bacon (2021)이 일반화하였다. Sun and Abraham(2021)은 상대시간(정책 시행 시점과의 시간 간격)별 분석에서 발생할 수 있는 문제점들에 대해서 논의한다. 정책의 점진 도입과 관련된 TWFE 문제는 기본적으로 모형 오설정(misspecification) 문제이다. 오설정된 모형에 OLS 방법을 맹목적으로 적용할 때는 항상 편향의 문제가 내재하는데, 점진적 처치 설정에서는 이 편향의 대수적 유도가 가능하고, 특히 잠재 비처치 성과의 평행추세 가정하에서 그 편향이 음(-)의 가중치에 기인하는 것을 확인할 수 있다. 이하에서는 먼저 de Chaisemartin and D’Haultfoeuille(2020)의 도출을 살펴보고 Goodman-Bacon (2021)의 확장 및 이와 관련된 Stata 명령, 그리고 Sun and Abraham(2021)의 논의에 대하여 설명한다.

가. de Chaisemartin and D’Haultfoeuille(2020, CH)의 예

CH(2020)의 예에서 고려하는 패널 데이터는 2개 그룹, 3개 기간으로 이루어져 있으며, 미처치군은 없다. 그룹 1이 t=1에 먼저 처치를 받고 그룹 2가 나중에 t=2에 처치를 받는다. 앞의 <표 1-2> 형식으로 처치터미(D)를 표시하면 다음과 같다.

<표 1-2> CH(2020) 예에서 처치터미

D	그룹 1	그룹 2
t=0	0	0
t=1	1	0
t=2	1	1

자료: CH(2020) 논문의 내용을 표로 표시. 미처치(never-treated) 그룹은 없음.

데이터 구조가 이러할 때 TWFE 회귀(xtreg y d i.year, fe vce(r))를 하면 처치터미 변수의 계수가 무엇을 추정하는지가 CH(2020) 논문에 제시되어 있다. 결론은, τ_{jt} 를 j 그룹 t 기 평균 정책효과($\tau_{jt} = \mu_{jt}^1 - \mu_{jt}^0$)라 할 때, TWFE는 $(1/2)\tau_{11} + (1/2)(\tau_{11} - \tau_{21} + \tau_{22})$

를 추정한다는 것이다(CH, 2020, 논문도 참조). 계수들의 합은 1이지만(1/2 + 1/2 - 1/2 + 1/2 = 1), 음수 -1/2이 계수에 포함됨에 유의하라.

[보론] CH(2020)의 음(-)의 가중치 도출

앞에서와 마찬가지로 분모는 $den = \sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^2 \tilde{D}_{it} D_{it}$ 이고 분자는 $vm = \sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^2 \tilde{D}_{it} Y_{it}$ 이다. 단, \tilde{D} 는 D로부터 양방향으로 평균을 제거하여 구한 편차이다($\tilde{D}_{it} = D_{it} - \bar{D}_{i.} - \bar{D}_{.t} + \bar{D}_{..}$). D의 값이 동일그룹, 동일시기 내에서는 모두 동일하므로 이하에서는 개체-시기를 나타내는 'it' 첨자를 사용하지 않고 그룹-시기를 나타내는 'jt' 첨자를 사용한다. 그러면 분자는 다음이 된다.

$$vm = \sum_{j=1}^2 \sum_{t=0}^2 n_{jt} \tilde{D}_{jt} \mu_{jt}$$

단 μ_{jt} 는 j그룹의 t기 성과변수 평균값이다. 각 j별로 $\sum_{t=0}^2 n_{jt} \tilde{D}_{jt} = 0$ 이고 각 t별로 $\sum_{j=1}^2 n_{jt} \tilde{D}_{jt} = 0$ 이 성립한다. 즉 각각의 t에서 $n_{2t} \tilde{D}_{2t} = -n_{1t} \tilde{D}_{1t}$ 이고, 따라서 분자는

$$vm = \sum_{t=0}^2 n_{1t} \tilde{D}_{1t} (\mu_{1t} - \mu_{2t})$$

이다. 균형패널에서 $n_{jt} = n_j$ 이고, \tilde{D}_{1t} 는 t=0에서 $-a_2/3$, t=1에서 $2a_2/3$, t=2에서 $-a_2/3$ 이다(단, $a_2 = n_2/n$). 정리해 보면

$$\hat{\theta} = -p(\mu_{10} - \mu_{20}) + 2p(\mu_{11} - \mu_{21}) - p(\mu_{12} - \mu_{22})$$

이다. 분모(den)는 $(2n/3)a_1 a_2$ 이므로 이를 고려하면 $p = -n_1 \tilde{D}_{10} / den = (n/3)a_1 a_2 / den = 1/20$ 이 된다. 그 결과

$$\hat{\theta} = (1/2)[(\mu_{11} - \mu_{21}) - (\mu_{10} - \mu_{20})] + (1/2)[(\mu_{11} - \mu_{21}) - (\mu_{12} - \mu_{22})]$$

이 성립한다. 첫째 항은 0기와 1기에서 그룹 1을 처치군, 그룹 2를 통제군으로 하는 DID의 절반이고, 둘째 항은 $(1/2)[(\mu_{22} - \mu_{12}) - (\mu_{21} - \mu_{11})]$ 과 같으며, 이는 1기와 2기에서 그룹 1을 통제군, 그룹 2를 처치군으로 하는 DID의 절반이다. 첫 번째 DID는 제대로 된 DID이고, 두 번째 DID는 1기와 2기 간에, 처치 상태에 있는 그룹 1을 통제군으로 사용하고 처치 상태가 0에서 1로 바뀌는 그룹 2를 처치군으로 사용하는 '뒤집힌 DID'¹⁹⁾이다. 미처치 시 평균 성과(μ_{jt}^0)에 평행추세가 있다고 하면, 즉 $\mu_{1t}^0 - \mu_{1s}^0 = \mu_{2t}^0 - \mu_{2s}^0$ 이 성립한다고 하면, $\hat{\theta}$ 가 추정하는 모수를 구할 수 있다. $\mu_{jt} = \mu_{jt}^0 [j < t] + \mu_{jt}^1 [j \geq t]$ 이므로, 위 식으로부터 $\hat{\theta}$ 가 $(1/2)\tau_{11} + (1/2)(\tau_{11} - \tau_{21} + \tau_{22})$ 를 추정함을 알 수 있다.

그룹 1의 처치효과가 모든 시기에 동일하면, 즉 $\tau_{11} = \tau_{12}$ 라면 TWFE는 τ_{11} 과 τ_{22} 의 산술평균을 추정한다. 하지만 처치효과들이 모두 이질적일 수 있는 일반적인 상황에는 모든 처치효과들의 부호가 동일하더라도 음의 가중치로 인해 TWFE는 반대 부호의 효과를 추정할 수도 있다. 예를 들어 $\tau_{11} = 0$, $\tau_{12} = 1$, $\tau_{22} = 0$ 인 경우인데, 음의 처치효과는 없음에도 불구하고 TWFE는 음수인 -0.5를 추정한다.

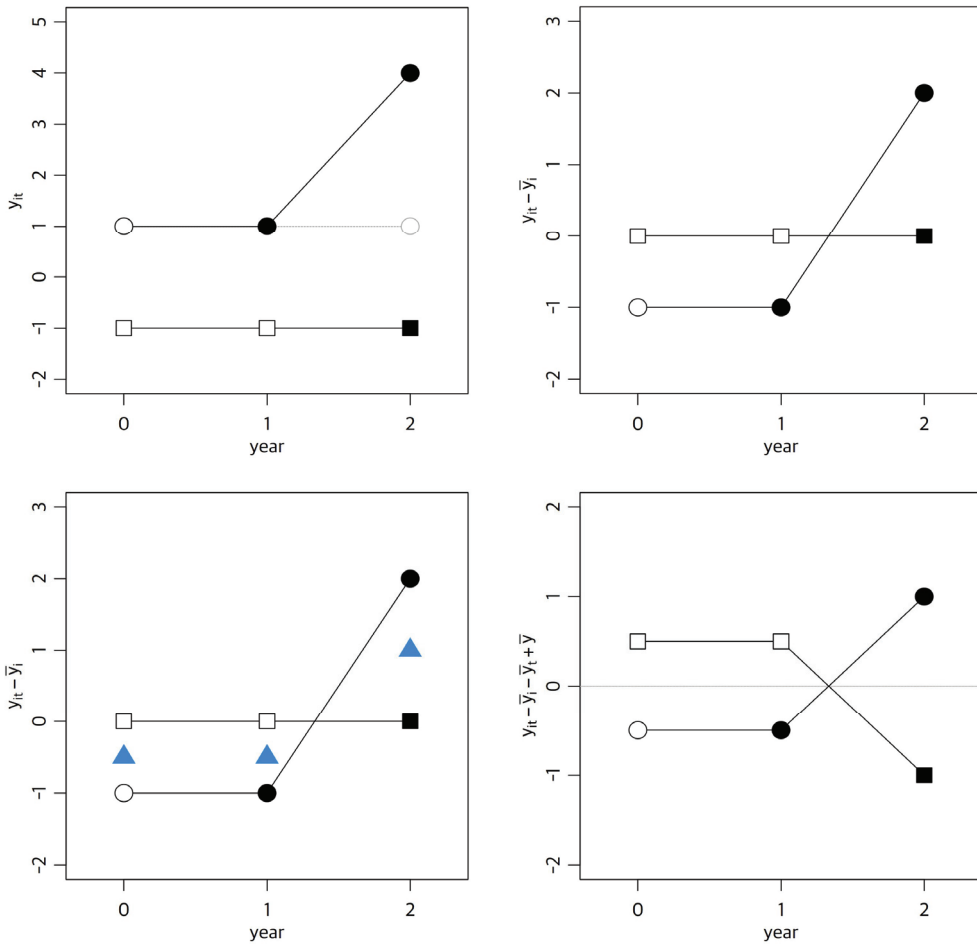
이 문제는 TWFE라는 회귀방법의 문제가 아니며, 연구자가 고려하고자 하는 상황을

19) Kim and Lee (2019)는 이를 'DID in reverse'라 하였다.

모형에 반영하지 못하였기 때문에 발생하는 문제이다. 0기와 1기를 비교하면, 그룹 1은 처치 상태가 0에서 1로 변하였고 그룹 2의 처치 상태는 변하지 않았다. 그러므로 DID의 맥락에서 보면 그룹 2의 증가분에 비하여 그룹 1의 증가분이 상대적으로 더 큰 정도가 정책효과로 해석된다. 1기와 2기를 비교하면 그룹 1의 처치 상태는 변하지 않은 반면 그룹 2의 처치 상태는 0에서 1로 변하였다. 그러므로 그룹 1의 증분 대비 그룹 2의 증분의 초과분은(아무런 사전 정보도 주어지지 않으면) 정책효과로 인식된다. 이는 당초부터 D의 변화가 동일 시기에만 Y에 영향을 미치도록 모형이 설정되어 있기 때문이다. 그런데 정책효과가 $\tau_{11} = 0$, $\tau_{12} = 1$, $\tau_{22} = 0$ 으로 설정되면, 그룹 1의 1기에서 2기로의 증가분 D에 변화가 없으므로 정책효과로 간주될 하등의 이유가 없다. 그래서 그룹 1의 1기에서 2기로의 증가분은 시간효과로 인정된다. 반면 같은 기간에 그룹 2의 경우에는 D가 0에서 1로 변하면서 Y에는 변화가 없으므로 회귀분석과 DID의 맥락에서는 정책효과가 음(-)으로 추정되는 것이 당연하다. TWFE의 음의 가중치 문제는 이질성을 고려하지 않은 모형에서 이질성을 반영할 때 음의 가중치가 발생함을 지적하는 것으로서 모형 오설정의 사례에 해당한다.

TWFE의 추정방법을 <그림 1-5>로 설명할 수도 있다. 단, 위의 설명과 달리 <그림 1-5>에서는 모양을 더욱 명확하게 보여주기 위해 $\tau_{11} = 0$, $\tau_{12} = 3$, $\tau_{22} = 0$ 으로 설정하였음에 유의하라.

[그림 1-5] TWFE의 음의 가중치 설명



자료: 저자 작성

〈그림 1-5〉의 좌상 그림은 기간별 종속변수 값을 나타낸다. 원은 그룹 1, 사각형은 그룹 2이다. 속이 채워진 도형은 처치시기를 나타내고 속이 채워지지 않은 도형은 처치 이전 시기를 나타낸다. 회색 점선과 원은 가상의 미처치 성과이다. 3개 기간에 그룹 1의 가상 비처치 성과는 각각 1, 1, 1이고 실제 성과는 1, 1, 4이다. 그룹 2의 가상 비처치 효과와 실제 성과는 모두 -1, -1, -1이다. 처치효과(ATT)는 그룹 1의 경우 $\tau_{11} = 0$, $\tau_{12} = 3$, 그룹 2의 경우 $\tau_{22} = 0$ 이다. 우상의 그림은 TWFE를 위해 우선 개체별 평균을 차감한 값들을 나타낸다. 다음으로 TWFE를 위해서는 기간별 평균을 차감해야 한다. 좌하 그림에는 $y_{it} - \bar{y}_i$ 의 기간별 평균들이 청색 삼각형으로 표시되어 있고, 우하 그림에

$y_{it} - \bar{y}_i$ 으로부터 그 기간별 평균을 차감한 값이 표시되어 있다. 개체별 평균과 기간별 평균을 차감하면서 결과가 양수인 경우(그룹 1의 2기)보다 음수인 경우(그룹 1의 1기와 그룹 2의 2기)가 많아지고 평균적으로 음(-)의 효과가 추정된다.

이러한 이론적 도출을 모의실험으로써 데이터를 생성하여 확인해 보자. 다음에서 그룹 1은 t=1에 처치가 이루어진 그룹이고, 그룹 2는 t=2에 처치가 이루어진 그룹이다. 처치효과는 그룹 1의 2기에 1로 두고, 나머지는 모두 0.2로 둔다. 그리고 다음과 같이 데이터를 생성한다.

```
. clear all
. local n1 2000
. local n2 1000
. local n = `n1' + `n2'
. local T = 3
. set seed 1
. set obs `='`n'*`T''

Number of observations (_N) was 0,
now 9,000.

. gen id = ceil(_n/`T')
. by id, sort: gen year = _n-1
. xtset id year

Panel variable: id (strongly balanced)
Time variable: year, 0 to 2
Delta: 1 unit

. gen group = 1 + (id > `n1')
. gen d = group==1 & year>=1 | group==2 & year>=2
. gen te = 0.2
. replace te = 1 if group==1 & year==2
(2,000 real changes made)
. gen y0 = (-1)^id * sqrt(id) + (-1)^year * sqrt(year) + rnormal()
. gen y1 = y0 + te
. gen y = y0
```

```
. replace y = y1 if d
(5,000 real changes made)
```

위 데이터에서 표본크기는 $n_1 = 2,000$, $n_2 = 1,000$ 이며, 그룹별·기간별 처치효과와의 참값은 $\tau_{12} = 1$ 을 제외하면 모두 0.2이다. 그러므로 0기와 1기를 이용한 DID는 $\tau_{11} = 0.2$ 를 추정하고, 1기와 2기를 이용한 ‘뒤집힌 DID’는 $\tau_{11} - \tau_{12} + \tau_{22} = -0.6$ 을 추정하며 TWFE는 그 둘의 산술평균인 -0.2를 추정할 것으로 예상된다.

실제로 0기와 1기 자료를 사용한 올바른 DID는 다음에서 보는 것처럼 .2308741로서 참값인 0.2와 유사하다.

```
. xtreg y d i.year if year <= 1, fe vce(r)

Fixed-effects (within) regression           Number of obs   =       6,000
Group variable: id                         Number of groups =       3,000

R-squared:                                  Obs per group:
  Within = 0.2799                            min         =         2
  Between = 0.0000                            avg         =         2.0
  Overall = 0.0001                            max         =         2

corr(u_i, Xb) = -0.0001                     F(2, 2999)     =       579.23
                                           Prob > F       =       0.0000
```

(Std. err. adjusted for 3,000 clusters in id)

y	Coefficient	Robust std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
d	.2308741	.0566244	4.08	0.000	.1198474	.3419007
1.year	-1.050112	.0466555	-22.51	0.000	-1.141592	-.9586321
_cons	.0231397	.0132236	1.75	0.080	-.0027885	.049068
sigma_u	38.729133					
sigma_e	1.0242957					
rho	.99930101	(fraction of variance due to u_i)				

1기와 2기 자료를 사용한 ‘뒤집힌 DID’를 TWFE로 구하면 다음과 같이 -.6152029를 얻으며 이 값은 이론상의 값인 -0.6과 유사하다.

```

. xtreg y d i.year if year >= 1, fe vce(r)

Fixed-effects (within) regression           Number of obs   =    6,000
Group variable: id                         Number of groups =    3,000

R-squared:                                 Obs per group:
  Within = 0.8154                           min =          2
  Between = 0.0000                          avg =          2.0
  Overall = 0.0015                           max =          2

corr(u_i, Xb) = -0.0009                     F(2, 2999)      =   6678.68
                                           Prob > F        =    0.0000

                                           (Std. err. adjusted for 3,000 clusters in id)

```

y	Coefficient	Robust std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
d	-.6152029	.0568193	-10.83	0.000	-.7266117	-.5037942
2.year	3.232677	.0319197	101.28	0.000	3.17009	3.295264
_cons	-.4629211	.040591	-11.40	0.000	-.54251	-.3833321
sigma_u	38.755868					
sigma_e	1.0234778					
rho	.99930309	(fraction of variance due to u_i)				

마지막으로 전체 자료를 사용한 TWFE는 이 둘의 산술평균인 -0.1921644 로서 이론상의 값인 -0.2 와 유사하다.

```

. xtreg y d i.year, fe vce(r)

Fixed-effects (within) regression           Number of obs   =    9,000
Group variable: id                         Number of groups =    3,000

R-squared:                                 Obs per group:
  Within = 0.6902                           min =          3
  Between = 0.0000                          avg =          3.0
  Overall = 0.0011                           max =          3

corr(u_i, Xb) = -0.0001                     F(3, 2999)      =   4491.15
                                           Prob > F        =    0.0000

                                           (Std. err. adjusted for 3,000 clusters in id)

```

y	Coefficient	Robust std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
d	-.1921644	.0494129	-3.89	0.000	-.289051	-.0952778
year						

1	-.7680865	.043182	-17.79	0.000	-.8527559	-.6834171
2	2.323578	.0563443	41.24	0.000	2.2131	2.434055
_cons	.0231397	.0156918	1.47	0.140	-.0076281	.0539076
sigma_u	38.74281					
sigma_e	1.0428549					
rho	.99927598	(fraction of variance due to u_i)				

위 실험의 경우 정책이 점진적으로 도입되고 정책효과가 이질적인데, 이때 이질성을 무시하고 단순한 TWFE 모형을 회귀하면, 정책효과의 평균은 0.2와 1의 가중평균이므로 반드시 양수임에도 불구하고 TWFE 추정값은 음수가 되었다.

나. Goodman-Bacon(2021)

앞의 CH(2020) 예에서는 미처치군이 없었다. 이 경우 TWFE는 올바른 DID와 뒤집힌 DID의 평균이 되고, 뒤집힌 DID가 이미 처치상태인 관측치들을 비교대상으로 하여 음의 가중치 문제를 발생시켰다. Goodman-Bacon(2021)은 미처치군까지 있는 보다 일반적인 상황을 고려한다. 논문의 Theorem 1은 TWFE 추정량이 3가지 유형의 2x2 DID 추정량들의 가중평균임을 보인다. 그 3가지 유형은 (i) 미처치군을 대조군으로 사용하는 DID, (ii) 더 먼저 처치된 그룹을 처치군으로 사용하고 더 나중에 처치된 그룹을 대조군으로 사용하는 DID(나중에 처치된 그룹이 처치되기 이전 시점까지 자료를 사용), (iii) 더 나중에 처치된 그룹을 처치군으로 사용하고 더 먼저 처치된 그룹을 대조군으로 사용하는 DID(먼저 처치된 그룹이 처치되고 난 후 자료만 사용)이다.²⁰⁾ (i)과 (ii) 유형에서 처치군의 D는 0에서 1로 변화하고 대조군의 D는 0에 유지되는 반면, (iii) 유형에서는 처치군의 D는 0에서 1로 변화하고 대조군의 D는(0이 아닌) 1로 유지된다. 이 (iii) 유형이 ‘뒤집힌 DID’에 해당하며 Y^0 에 평행추세가 있다는 가정하에서 음(-)의 가중치 문제를 야기한다. Goodman-Bacon(2021)의 Theorem 1은 3개 유형에 속하는 각 2x2 DID에 대응하는 가중치도 제공한다.

2003~2007년 패널자료의 예를 들어 보자. 그룹 g2004는 2004년이 처치연도, 그룹 g2006은 2006년이 처치연도, 그룹 g2007은 2007년이 처치연도 g0은 미처치 그룹이

20) 표본기간 내내 처치된 그룹이 있는 경우 내내 처치된 그룹을 대조군으로 사용하는 DID는 (iii) 유형의 일부로 볼 수도 있고 별도의 유형 (iv)로 볼 수도 있다. Stata의 xtdidregress 이후 'estat bdecomp'는 이를 별도의 유형('Treated later vs always treated')으로 분류하여 보고한다.

다. 그러면 가능한 2x2 DID는 처치군과 대조군을 짝지어 (i) g2004 vs g0, g2006 vs g0, g2007 vs g0, (ii) g2004 vs g2006, g2004 vs g2007, g2006 vs g2007, (iii) g2006 vs g2004, g2007 vs g2004, g2007 vs g2006의 9개가 있다. (i)과 (ii)는 제대로 된 DID이고 (iii)은 ‘뒤집힌 DID’이다.

Stata에서 처치시기가 다양한 데이터를 이용하여 xtdidregress를 하면 그 후 estat bdecomp로써 Goodman-Bacon(2021) 분해를 구현할 수 있다. 다음 Stata 결과를 보자.²¹⁾

```
. use https://friosavila.github.io/playingwithstata/drddid/mpdta.dta, clear
(Written by R. )

. xtset countyreal year

Panel variable: countyreal (strongly balanced)
Time variable: year, 2003 to 2007
Delta: 1 unit

. gen d = treat & year >= first_treat

. xtdidregress (lemp) (d), group(countyreal) time(year)

Treatment and time information

Time variable: year
Control:      d = 0
Treatment:    d = 1
```

	Control	Treatment
Group countyreal	309	191
Time Minimum	2003	2004
Maximum	2003	2007

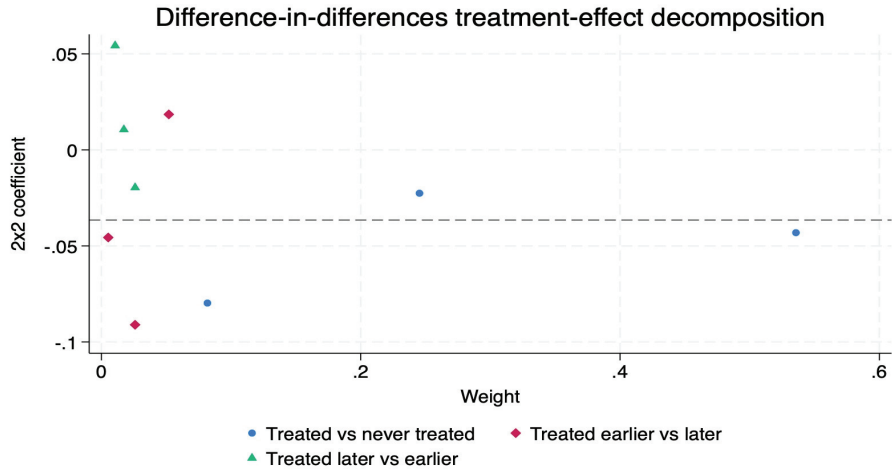
```
Difference-in-differences regression
Data type: Longitudinal

Number of obs = 2,500
```

21) 여기서 사용한 데이터에는 표본기간 시작 이전에 이미 처치가 이루어진 그룹(‘always treated’)이 없다. 이미 처치된 그룹이 있으면 estat bdecomp는 ‘Treated later vs always treated’를 따로 분류해서 리포트한다. 다음은 Goldring (2019)이 제공하는 Goodman-Bacon (2021) 사용 자료로 분석하는 코드 예제이다. 이 코드를 실행하면 4개 섹션으로 구성된 결과가 리포트될 것이다.

```
use https://github.com/tgoldring/ddtiming/raw/main/nofault_divorce, clear
xtset state year
xtdidregress (asmrs) (treat), group(state) time(year)
estat bdecomp, graph
```


[그림 1-6] Goodman-Bacon decomposition



자료: 저자 작성

위에서 `xtdidregress`는 TWFE와 동일한 추정이며 추정값은 -0.0365489 이다. 앞서 설명한 3가지 종류의 9개 2x2 DID 추정값들과 가중치들로 분해한 결과가 `estat bdecomp`에 의해 제시된다. 이 결과에서 ‘Treated vs never treated’ 부분이 (i), ‘Treated earlier vs later’ 부분이 (ii), ‘Treated later vs earlier’ 부분이 (iii)에 해당한다. <그림 1-6>에 9가지 2x2 DID 추정값들이 제시되어 있다. 수평선은 TWFE 추정값(-0.0365489)에 해당한다.

(i) ‘Treated vs never treated’의 3가지 2x2 DID 추정 결과는 다음과 같이 구할 수도 있다. ‘2004 vs never treated’의 수치는 `g2004`와 `g0` 그룹의 데이터를 사용하고, 2006, 2007 그룹도 이와 유사하게 처리한다.

```
. qui xtreg lemp d i.year if inlist(first, 2004, 0), fe vce(r)
. di e(b)[1,1]
-.07974913

. qui xtreg lemp d i.year if inlist(first, 2006, 0), fe vce(r)
. di e(b)[1,1]
-.02257005

. qui xtreg lemp d i.year if inlist(first, 2007, 0), fe vce(r)
. di e(b)[1,1]
-.04310603
```

위 3개 수치가 앞 'estat bdecomp'의 'Treated vs never treated' 섹션 3개 수치들과 동일함을 확인하라. 다음으로 (ii) 'Treated earlier vs later'의 3개 2x2 DID 추정 결과는 다음과 같이 구할 수도 있다. '2004 vs 2006'의 경우에는 g2004와 g2006 그룹 자료를 사용하되 g2006 그룹이 처치되기 이전인 2005년까지의 관측치들을 사용한다. 나머지도 유사하게 처리된다.

```
. qui xtreg lemp d i.year if inlist(first, 2004, 2006) & year < 2006, fe vce(r)
. di e(b)[1,1]
-.04560791

. qui xtreg lemp d i.year if inlist(first, 2004, 2007) & year < 2007, fe vce(r)
. di e(b)[1,1]
-.0910554

. qui xtreg lemp d i.year if inlist(first, 2006, 2007) & year < 2007, fe vce(r)
. di e(b)[1,1]
.01848038
```

여기서도 값들이 앞의 'estat bdecomp'에서 리포트된 값들과 동일함을 확인하라. 마지막으로 (iii) 'Treated later vs earlier' 섹션의 값들은 다음과 같이 복원할 수 있다. 아래에서 '2006 vs 2004'의 경우에는 g2004와 g2006 그룹에 대해서 g2004 그룹이 처치되고 난 이후인 2004년 이후 관측치들을 사용한다. 나머지도 마찬가지로 처리된다.

```
. qui xtreg lemp d i.year if inlist(first, 2004, 2006) & year >= 2004, fe vce(r)
. di e(b)[1,1]
.0542869

. qui xtreg lemp d i.year if inlist(first, 2004, 2007) & year >= 2004, fe vce(r)
. di e(b)[1,1]
-.01960481

. qui xtreg lemp d i.year if inlist(first, 2006, 2007) & year >= 2006, fe vce(r)
. di e(b)[1,1]
.01057545
```

위 3개 값들도 앞의 'estat bdecomp'에서 리포트된 값들과 동일하다.

이상의 'Goodman-Bacon 분해'는 TWFE 추정값이 이러한 방식으로 분해될 수 있음을 의미하며, 이로부터 직접 부적절한 비교(Treated later vs earlier)에 해당하는 수치를 제외하라는 것은 아니다. 정책의 순차 적용 맥락에서 평균 처치효과를 추정하는 문제는 다음 III장에서 설명한다.

다. 상대시간별 처치효과를 포함한 TWFE에서 오염 문제

Sun and Abraham(2021, SA)은 TWFE 모형에서 처치 시작 시점으로부터 기간 차이(relative time)별 더미변수들을 포함한 모형에 대해서 고려하였다. 앞의 mpdta.dta 자료라면 `gen reltime = treat*(year-first_treat)`로써 reltime 변수를 만들고 단일 처치더미 대신에 reltime별 더미변수를 이용하여 TWFE를 하는 것이다. 단, 표본기간 내에서 처치되지 않은 그룹(g0)에 대해서는 모든 더미변수의 값을 0으로 하고, reltime = -1에 해당하는 더미변수는 기준이 되므로 제외한다. Stata로 구현하는 원초적인 방법은 relative time에 따라 Tm4, Tm3, Tm2, Tm1, Tp0, Tp1, Tp2, Tp3 더미변수들을 생성하고(단, never treated 그룹은 모든 더미변수의 값이 0) Tm1을 제외한 나머지 더미변수들을 사용하는 것이다.

```
gen reltime = treat*(year-first_treat)
forv j=4(-1)1 {
    gen Tm`j' = treat*(reltime==`j')
}
forv j=0/3 {
    gen Tp`j' = treat*(reltime==`j')
}
xtreg lemp Tm4-Tm2 Tp0-Tp3 i.year, fe vce(r)
```

더 짧지만 이해가 다소 어려운 구문은 다음과 같다.

```
gen reltime = treat*(year-first_treat)+5
xtreg lemp c.treat#i(1/3 5/8).reltime i.year, fe vce(r)
```

위의 첫 번째 줄에서 5를 더한 것은 음수를 없애 주기 위함이다.

SA(2021)에 의하면, 이처럼 상대시간별 처치 더미변수를 포함하고 TWFE를 할 경우 각 더미변수의 계수가 당해 상대시간에 해당하는 DID들 뿐 아니라 다른 상대시간에 해

당하는 DID들에도 의존하게 된다. 그 결과 상대시간 r 에 해당하는 처치 더미변수의 계수는 해당 상대시간 r 뿐 아니라 다른 상대시간의 처치효과에 의하여 오염(contamination)된다는 것이 SA(2021) 논문이 지적하는 바이다. 특히 상대시간 처치효과 더미변수들을 포함시켜 TWFE를 할 때 사전기간 평행추세 가정 검정이 사후시기 처치효과에 의하여 영향받을 수 있으므로 위와 같은 TWFE 회귀에서 $Tm2$ 등 더미변수의 계수를 참조하여 사전기간 평행추세를 검정하는 것은 부적절할 수 있다. 하지만 처치효과가 이질적일 때 이질적인 처치효과를 반영하여 모형이 제대로 설정되어 있으면 (당연하게도) 이러한 문제가 발생하지 않는다.

3. 소결

본 장 2절에서 설명한 문제들은 잘못 설정된 모형을 TWFE 회귀로써 추정할 때 발생하는 문제이다. 그 문제는 예를 들어 처치그룹·기간별로 처치효과가 다른데도 단일한 처치더미를 포함시켜 동일한 처치효과를 추정할 때 발생한다. 모형이 제대로 설정되어 있으면 이러한 문제가 발생하지 않는다. 회귀분석에서 효과가 이질적임에도 단일한 변수를 사용하는 경우에도 똑같은 문제가 발생한다. 예를 들어 남녀간에 특정 변수의 영향에 차이가 있음에도 상호작용항을 포함하지 않을 때 음(-)의 가중치가 개입되는 것은 기초적인 수학으로도 보일 수 있는 평범한 현상이다(한치록, 2024a, 281쪽 하단과 554쪽 미주 14 참조).²²⁾ 패널 회귀분석에서 통합 OLS 회귀와 FE 회귀도 명확한 사례이다(한치록, 2024b 참조). Sun and Abraham(2021)과 Wooldridge(2021)가 설명하듯이, 상호작용항들을 포함해 모형을 제대로 설정하면 이런 문제는 발생하지 않는다. 음의 가중치 문제에 대한 해법은 이질성을 반영하여 모형을 제대로 세우는 것이다.

다음 장에서는 상이한 시기에 처치가 이루어지고 처치효과가 그룹별·시기별로 상이할 수 있을 때도 견고한 방법들에 대하여 논의한다. 논의되는 방법들은 그룹·시기별로 처치효과가 상이할 수 있도록 모형을 세우는 것과 기본적으로 같다.

22) 고유근·고유벡터를 이용하여 적절하게 회전시킨 모수들의 경우에는 비음 가중치를 이용한 가중평균을 추정하나, 원래의 공간으로 벡터를 되돌리면 음의 가중치가 발생할 수 있다.

1. 도입

본 장에서는 점진적인 정책 적용 시 정책효과 식별에 대하여 논의한다. 현재 사용되는 식별방법은 크게 ① 2x2 DID들을 적절히 사용하는 방법과 ② 가상 미처치 성과를 추산하는 방법으로 구분된다. 이하에서는 ①방법을 ‘더미변수법’이라 하고 ②방법을 ‘예측접근법’이라 하겠다.

본 장에서 소개하는 방법들은 모두 2x2 DID들 또는 그와 유사한 절차에 기초한다. 그룹별로 정책 도입 시기가 상이한 경우 통상적으로 정책 도입 직전 시점(보통 “g-1기”라 지칭함)을 기준(reference)으로 DID를 진행하며, 그 추정량이 경제적으로 의미 있는 정책효과로 해석되기 위한 가정들이 문헌에서 제시되었다. 그 가정들은 크게 다음 3가지로 정리된다.

- (i) **Stable unit treatment value (SUTVA) 가정:** 개체 i 의 성과변수(outcome variable)가 자신에 의하여 영향을 받고 다른 개체들의 처치상태에 영향을 받지 않는다는 가정으로, 처치효과의 파급을 배제하는 의미가 있다(Roth et al., 2023). 통상적으로 SUTVA는 잠재성과 프레임워크(potential outcome framework)에 암묵적으로 포함된다(Roth et al., 2023). 잠재성과변수 Y_i^0 , Y_i^1 은 예를 들어 $Y_{it}^0 = \alpha_i + X_{it}\beta + \varepsilon_{it}$ 와 $Y_{it}^1 = \tau_{it} + Y_{it}^0$ 처럼 오직 개체 i 의 상태에 의존하는데, 이로써 SUTVA 상황이 상정되는 것이다. 이 가정이 위배되는 상황은 한 집단의 정책 도입이 다른 집단의 정책 미도입 시 성과에 영향을 미치는 것인데(예를 들어 한 지역의 고교평준화로 학생들이 이동하여 비평준화 인접지역의 학업성과가 영향을 받는 것), 이 경우 후발 정책 도입 집단의 잠재 성과변수와 인과효과의 정의가 불분명해진다.
- (ii) **No-anticipation 가정:** 처치 전 기간의 성과변수는 비처치 잠재 성과변수와 같다는 가정으로, (미래의 또는 미래에 계획된) 처치가 처치 이전의 성과변수에 영향을 주지 않는다는 의미가 있다(Roth et al., 2023). 이 가정은 개체들이 처치가 일어날 것에 대해 예상할 수 없거나, 예상 가능하더라도 그 예상에 기반하여 성과변수에 영향을 미치는 행동을 하지 않는 경우 성립할 수 있다(Abbring and van

den Berg, 2003). No-anticipation 가정은 처치효과 측정의 기준시점을 처치 직전시점($g-1$)으로 설정하도록 해 준다. 만약 이 가정이 위배되어 처치가 발생하기 전 기간에서 성과변수가 그 미래의 처치에 영향받을 수 있다고 생각되는 경우, 단순히 처치가 발생한 시점을 실제 발생 시점보다 이른 시점으로 재정의하는 방법을 통해 이 가정이 성립하도록 만들 수 있다(Borusyak et al., 2024; Callaway and Sant'Anna 2021). 간단히 말하여 이 가정은 $g-1$ 기를 기준으로 한 DID 분석이 경제적인 의미를 갖도록 해 주며, 만약 이 가정이 위배된다고 생각된다면 시간을 거슬러서 기준시점을 그 이전으로 설정하면 될 일이다.

(iii) **평행추세(parallel trends) 가정**: 이 가정은 처치군과 통제군의 비처치 잠재성과의 평균 추세가 동일하다는 가정으로서, 모든 DID 추정 결과를 인과효과로 해석하는 데 필수적이다. 만약 평행추세 가정이 관측가능 변수(X 변수) 때문에 위배된다면 이 X 변수들을 적절히 통제하여 인과효과를 식별할 수 있다. 비관측 요인으로 인하여 추세가 상이할 경우에는 요인모형을 상정하여 문제 해결을 시도할 수 있다.

이하의 논의에서 위 세 가정이 모두 성립한다고 가정한다. ③의 경우 요인모형을 제외하면 모두 관측 변수를 통제하면 평행추세가 성립한다고 가정하고, 요인모형은 요인모형(f, λ_i)의 형태로 평행추세 가정이 위배되는 경우까지 확장한다.

앞의 더미변수법과 예측접근법으로 돌아와서, 더미변수법에는 de Chaisemartin and D'Haultfoeuille(2020, 2024; CH), Callaway and Sant'Anna(2021, CS), Wooldridge (2021), Sun and Abraham(2021, SA) 등이 널리 알려져 있으며, Stata 패키지로는 `csdid`, `jwddid`, `did_multipleqt`, `eventstudyinteract` 등이 있다. Stata에 내장된 `hdidregress`, `xthdidregress`도 사용 가능하다. 예측접근법은 처치시기에 관측되지 않은 처치군의 Y^0 를 추산하는 방법이다. 통상적으로 'imputation'(결측값 대체) 방법이라 하며, Callaway and Karami(2023), Borusyak et al.(2024, BJS), Park(2025) 등의 방법이 있다. Stata 패키지로 BJS(2024)를 구현한 `did_imputation`이 있다.

2. 더미변수법

더미변수들이 포함된 모형을 추정하여 음(-)의 가중치 문제(또는 '뒤집힌 DID' 문제)를 해결하려는 시도들은 모두 그룹별·시기별로 별도의 2x2 DID들을 수행한 후 그 추정치들을 적절한 방식으로 가중평균 하는 것으로 요약 정리될 수 있다. 그 구현 방법으로서, 실제로 2x2 DID들을 수행하고 가중평균을 구하는지, 아니면 영리하게 상호작용항

들을 잘 포함해서 TWFE를 이용하는지에 차이가 있지만, 이 차이는 부차적이다. 다만 다양한 방법 간에 비교대상으로 삼는 관측치들의 선정과 공변량(X 변수) 처리방법에서는 주의할 만한 차이가 있다. 이하에서는 CS(2021)의 방법과 csdid 패키지, Wooldridge (2021)의 방법과 jwddid 패키지, SA(2021)의 방법과 eventstudyinteract 패키지, CH(2020, 2024) 방법과 did_multiplet²³⁾를 요약하고, 최근 Stata 버전(18 이후)의 공식 명령인 hdidregress와 xthdidregress에 대하여 설명한다.

가. Callaway and Sant'Anna(2021)

CS(2021)의 방법을 한 마디로 설명하면 적절해 보이는 다양한 2x2 DID들을 구한 후 그중 적절해 보이는 DID들을 표본크기에 맞추어 가중평균 하는 것이다. 기간수와 그룹수가 많을 경우 파생되는 2x2 DID가 아주 많을 수 있는데, csdid 패키지는 그 중 적절해 보이는 DID들을 선택하여 사용자에게 보여준다.

CS(2021)는 대조 관측치로서 표본기간 내에 처치를 받지 않은 그룹('never treated')과 해당 시점에서 아직 처치를 받지 않은 그룹들('not yet treated')을 각각 고려한다. 통제변수(X 변수)²⁴⁾와 관련해서는 IPW(inverse probability weighting), OR(output regression), DR(doubly robust) 등을 고려한다(X 변수가 없으면 IPW, OR, DR은 아무런 연관도 없다).²⁵⁾

비교 관측치의 선정과 X 처리 방법은 연구자가 선택할 사항이다. 비교 대상과 X 처리 방법에 대한 선택이 이루어지면 다양한 2x2 DID 추정량들이 도출되는데, CS(2021)의 방법은 이들 DID 중 특정 비교시기 및 대조군에 대한 2x2 DID들을 계산하고, 이들을 비음(nonnegative) 가중치로 가중평균하여 집계(aggregate)하는 추정량과 그 표준오차 계산법을 제시한다. 다음은 csdid 패키지(ssc install csdid로써 설치)를 사용한 예제를 이용하여 내용을 설명하고자 한다. X 변수 처리법은 아래 보론을 참조하기 바란다.

23) CH(2024)는 정책이 이진적이 아닐 때로 확장하였으며, 최근 버전의 did_multiplet_dyn은 Stata에서 이를 구현한다.

24) X 변수가 정책의 영향을 받아서는 안 됨은 물론이다. 보통 정책 도입 이전의 개체 특성이 사용되며 시간 불변이다.

25) IPW와 DR은 확률의 역수가 결부되며, 처치 확률이 1에 가까우면 분모가 0에 가까워지고 가중치가 ∞로 발산할 수 있으므로, 현실의 분석에서는 (DR이 이론적으로 깔끔할지라도) 상당한 주의가 필요하다. 이는 특히 X 값이 대조군의 X 범위에서 벗어난 처치 관측치가 있을 때 문제가 발생하는데, 이 경우 연구자가 취할 수 있는 다양한 선택에 따라 추정값이 크게 변할 수 있어서 분석의 신뢰성에 흠집이 생길 수 있다.

[보론] OR, IPW, DR

그룹(코호트)을 g 로 표시하자. 코호트의 최초 처치시기를 g 로 표기하면 간편하다. 이 표기법을 사용하면 $g-1$ 기는 처치 직전 시기이다. CS (2021)는 이 처치 직전 시기를 기준으로 처치효과들을 구한다.²⁶⁾ (i) Outcome regression (OR) 방법은 대조 관측치들(미처치군 또는 해당 시기에 $D=0$ 인 모든 관측치)을 사용하여 $Y_t^0 - Y_{g-1}^0$ 을 X 로써 예측하는 $m_{g,t}(X)$ 함수를 추정한다. 그다음 평균 처치효과(ATT)는 g 그룹의 실제 $Y_t - Y_{g-1}$ 에서 $m_{g,t}(X)$ 를 차감한 값의 평균으로써 ATT를 추정한다.²⁷⁾ 여기서 $m_{g,t}(X)$ 를 추정할 때에는 대조(비처치) 관측치를 사용하지만, ATT를 구할 때의 X 는 처치 관측치의 X 값이다. OR 추정량은 $m_{g,t}(X)$ 함수가 올바르게 설정되어 있으면 일치 추정량을 제공할 것이다. (ii) OR 방법이 $m_{g,t}(X)$ 로써 counterfactual 값들을 예측하여 사용함에 반하여, inverse probability weighting (IPW) 방법은 그 대신 대조 관측치들의 실제 $Y_t - Y_{g-1}$ 값을 사용한다. 이때 처치 관측치들과 대조 관측치들을 X 의 분포에 따라 적절하게 비교 가능하게 만들어 주어야 하는데 그 방법은 대조 관측치에 $p_g(X)/[1-p_g(X)]$ ²⁸⁾를 곱해 주는 것이다. 확률들은 logit, probit 등 적절한 방법으로 추정할 수 있을 것이다. IPW 방법은 $p_g(X)$ 가 제대로 설정되었으면 일치 추정량을 제공한다. 마지막으로 doubly robust (DR) 방법은 이 둘을 결합하여 둘 중 하나의 함수형태라도 올바르게 설정되었으면 일치추정량을 얻도록 해 준다(그래서 이름이 doubly robust). 잠재 성과변수 평균의 DR 추정에 대해서는 다음 보론을 참조하라.

[보론] 잠재 성과변수의 DR 추정

Doubly robust (DR)의 원리는 결측치와 관련하여 Robins, Rotnitzky, and Zhao (1994, JASA)가 처음으로 제시하였다. 잠재성과의 평균 중에서 $E(Y^0 | D=1)$ 이외에 통제군의 Y^0 는 관측이 되므로 그 평균 또한 간단히 추정되고, 처치군의 Y^1 도 관측이 되므로 간단히 추정된다. 처치군의 가상 미처치 성과 Y^0 의 평균 $E(Y^0 | D=1)$ 에 관한 DR 추정량은 Robins et al (1994)의 원리를 적용하여 도출할 수 있다. 통제군의 Y^1 의 평균 $E(Y^1 | D=0)$ 은 ATT에 사용되지 않으므로 구할 필요가 없는데, 원한다면 구할 수 있다. 이하에서는 $E(Y^0 | D=1)$ 의 DR 추정량을 구해 본다.

만약 $E(Y^0 | D=1) = E(Y^0 | D=0)$ 이라면 처치군의 가상 미처치 성과 평균은 통제군의 평균 성과와 동일하므로 곧바로 추정할 수 있다. 그러므로 이 등식이 성립하지 않는 경우가 문제가 된다. 이 경우 $E(Y^0 | D=1)$ 추정에서 필수적인 가정은 $E(Y^0 | X, D=1) = E(Y^0 | X, D=0)$ 이라는 것이다. 즉 X 가 통제 되면 처치군과 통제군의 '비처치 시 성과'가 동일하다는 것이다. 이 가정이 없으면 처치군의 Y^0 에 대하여 유추할 정보가 없는 셈이므로 추가적인 가정(예를 들어 요인모형)을 하지 않으면 counterfactual의 추정 자체가 불가능하고 따라서 처치효과 추정도 불가능하다. 반면 $E(Y^0 | X, D=1) = E(Y^0 | X, D=0)$ 가정이 성립하면 X 가 주어질 때 처치군의 Y^0 평균을 통제군의 Y^0 평균으로부터 유추할 수 있다. $E(Y^0 | X, D)$ 가 D 에 의존하지 않는다는 이 가정을 평균이 D 와 독립이라는 뜻에서 '평균 독립(mean independence)' 가정이라고도 한다. 평균 독립 가정하에서 $E(Y^0 | X, D=1)$ 을 $E(Y^0 | X)$ 로 표기해도 좋다.

연구자가 설정하는 $E(Y^0 | X)$ 에 대한 모형을 m_X 라 하고, $P(D=1 | X)$ 에 대한 모형을 e_X 라 하자. 그러면 처치군의 가상(counterfactual) 미처치 성과의 평균 $E(Y^0 | D=1)$ 의 DR 추정량은 다음과 같다.

- 26) 최초 처치직전시점이 아니라 그룹별로 처치직전시기를 기준으로 삼는다.
- 27) 이 방법은 사실상 나중에 살펴볼 imputation 방법과 동일하다.
- 28) 이 자체는 '확률의 역수'가 아님에도 IPW라는 이름이 붙는 것은, ATT가 아닌 ATE를 구할 때 처치 관측치들은 $p_g(X)$ 로 나누고 미처치 관측치들은 $1-p_g(X)$ 로 나누어 모집단을 잘 반영하도록 가중치를 조정해 주기 때문이다. ATT를 구할 때는(수학적으로 볼 때) 처치 관측치들과 대조 관측치들에 모두 $p_g(X)$ 를 곱하게 되는데 그래서 처치 관측치의 가중치는 1이고 미처치 관측치들의 가중치는 $p_g(X)/[1-p_g(X)]$ 가 되는 것이다.

$$\hat{\theta}_{dr} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^n \left[D_i \hat{m}_i + \left(\frac{1-D_i}{1-\hat{e}_i} \right) \hat{e}_i (Y_i - \hat{m}_i) \right], \quad n_1 = \sum_{i=1}^n D_i$$

이 추정량이 DR이라는 것을 증명해 보자. $E(Y^0 | X)$ 의 참모형을 μ_X 라 하고 $P(D=1 | X)$ 의 참모형을 ρ_X 라 하자. 그리고 $p = P(D=1)$, $\hat{p} = n_1/n$ 이라 하자. \hat{p} 가 p 의 일치추정량임은 자명하다. 이제, (i) 우선 m_X 가 올바르게 맞다면($m_X = \mu_X$), e_X 가 맞든 틀리든 상관없이 다음이 성립한다.

$$\hat{p} \hat{\theta}_{dr} \rightarrow E \left[D \mu_X + \left(\frac{1-\rho_X}{1-e_X} \right) e_X (\mu_X - \mu_X) \right] = E(D \mu_X)$$

그런데 베이즈 정리에 따라 $E(D \mu_X) = E(\mu_X | D=1)P(D=1)$ 이다. $\mu_X = E(Y^0 | X)$ 이므로 우변 첫째 항은 $E(\mu_X | D=1) = E[E(Y^0 | X) | D=1]$ 이 되는데 평균 독립 가정으로 인하여 $E(Y^0 | X)$ 는 $E(Y^0 | X, D=1)$ 과 같으므로 반복평균의 법칙에 따라 $E[E(Y^0 | X) | D=1]$ 은 $E(Y^0 | D=1)$ 과 같게 된다. 이로부터 $E(\mu_X | D=1) = E(Y^0 | D=1)$ 을 얻는다. 또한 $P(D=1) = p$ 이므로 최종적으로 $\hat{p} \hat{\theta}_{dr} \rightarrow E(Y^0 | D=1)p$ 가 되어 원하는 결과를 얻는다. (ii) 다음으로 e_X 가 올바르게 설정되어 $e_X = \rho_X$ 인 경우를 살펴보자. 통제군에 관측되는 것은 Y^0 , 즉 $(1-D)Y = (1-D)Y^0$ 이므로, $e_X = \rho_X$ 일 때, m_X 가 맞든 틀리든 상관없이 다음이 성립한다.

$$\hat{p} \hat{\theta}_{dr} \rightarrow E \left[D m_X + \left(\frac{1-\rho_X}{1-\rho_X} \right) \rho_X (\mu_X - m_X) \right] = E(\rho_X \mu_X) + E[(D - \rho_X) m_X] = E(\rho_X \mu_X)$$

위 식에서 $E[(D - \rho_X) m_X] = 0$ 임은 반복평균의 법칙을 이용하여 확인할 수 있다. 그런데 우변은 $E(\rho_X \mu_X) = E[E(D | X) E(Y^0 | X)] = E[E(D Y^0 | X)] = E(D Y^0)$ 이고(마지막 등식은 반복평균의 법칙), 마지막으로 $E(D Y^0) = E(Y^0 | D=1)p$ 가 되어 역시 원하는 결과를 얻는다. Sant'Anna and Zhao (2020)나 Callaway and Sant'Anna (2021)의 DR 추정량들은 이 DR 추정량에 기반하여 도출할 수 있다.

이하에서 csdid 패키지(Rios-Avila et al, 2021)를 이용하여 CS(2021)의 방법의 구동을 예시로써 보여주고자 한다. 데이터셋은 mpdta.dta로서 CS(2021)에 사용된 자료의 부분집합이다. 이 자료는 2003~2007년 미국 county 수준 패널 데이터이며 그룹으로는 g2004, g2006, g2007, g0가 있다. 각 그룹명의 연도는 최초 처치 연도를 의미하며 g0는 표본기간 처치가 시작되지 않은 지역(county)들이다(never treated). 종속변수는 고용수준의 로그값(lemp)이며 처치(D)는 최저임금 인상 여부이다. 주별로 최저임금 인상시기가 다르다. 데이터셋의 구조와 표본크기는 구체적으로 다음과 같다. 이때 '1'은 처치되었음을 의미한다.

〈표 1-3〉 mpdta.dta 데이터셋 관측치 구조

D	g2004	g2006	g2007	g0	nobs
t=2003	0	0	0	0	500
t=2004	1	0	0	0	500
t=2005	1	0	0	0	500
t=2006	1	1	0	0	500
t=2007	1	1	1	0	500
n	20	40	131	309	500
N = 5n	100	200	655	1,545	2,500

자료: mpdta.dta 자료를 이용하여 저자 작성

Stata에서 데이터를 읽어 그룹별 관측치를 재확인하면 다음과 같다.

```
. use https://friosavila.github.io/playingwithstata/drdid/mpdta.dta, clear
(Written by R.)

. tab year first_treat
```

year	first.treat				Total
	0	2004	2006	2007	
2003	309	20	40	131	500
2004	309	20	40	131	500
2005	309	20	40	131	500
2006	309	20	40	131	500
2007	309	20	40	131	500
Total	1,545	100	200	655	2,500

우선 X 변수를 고려하지 않는 경우를 보자. Never Treated를 대조군으로 하는 csdid 명령 실행 결과는 다음과 같다. 이 명령에서는 종속변수명, i 변수명(ivar 옵션), t 변수명(time 옵션), 그룹변수명(gvar 옵션)을 지정한다. 대조군에 관한 옵션이 사용되지 않으면 디폴트로 never-treated가 사용된다.

```
. csdid lemp, ivar(countyreal) time(year) gvar(first_treat)
.....
Difference-in-difference with Multiple Time Periods
Number of obs = 2,500

Outcome model : regression adjustment
```

Treatment model: none						
	Coefficient	Std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
g2004						
t_2003_2004	-.0105032	.023251	-0.45	0.651	-.0560744	.0350679
t_2003_2005	-.0704232	.0309848	-2.27	0.023	-.1311522	-.0096941
t_2003_2006	-.1372587	.0364357	-3.77	0.000	-.2086713	-.0658461
t_2003_2007	-.1008114	.0343592	-2.93	0.003	-.1681542	-.0334685
g2006						
t_2003_2004	.0065201	.0233268	0.28	0.780	-.0391996	.0522398
t_2004_2005	-.0027508	.0195586	-0.14	0.888	-.0410849	.0355833
t_2005_2006	-.0045946	.0177552	-0.26	0.796	-.0393942	.0302049
t_2005_2007	-.0412245	.0202292	-2.04	0.042	-.0808729	-.001576
g2007						
t_2003_2004	.0305067	.0150336	2.03	0.042	.0010414	.0599719
t_2004_2005	-.0027259	.0163958	-0.17	0.868	-.0348611	.0294093
t_2005_2006	-.0310871	.0178775	-1.74	0.082	-.0661264	.0039522
t_2006_2007	-.0260544	.0166554	-1.56	0.118	-.0586985	.0065896

Control: Never Treated

See Callaway and Sant'Anna (2021) for details

위 결과에서 g2004 블록은 g2004 그룹과 ‘Control’ 즉 ‘Never Treated’ 그룹을 이용하여 구한 2x2 DID 결과들을 보여 준다. 표의 맨 왼쪽 칼럼에서 t_2003_2004 라벨은 2003년을 사전시기, 2004년을 사후시기로 하여 DID를 한 결과이다(처치군은 g2004 그룹, 대조군은 g0 그룹). t_2003_2005는 2003년을 사전시기, 2005년을 사후시기로 하여 DID를 한 결과이다. t_2003_2004와 동일한 결과는 xtset county year 후에 `gen d = treat & year >= first`로써 d 변수를 생성하고 나서 `xtreg lemp d i.year if inlist(year, 2003, 2004) & inlist(first, 2004, 0), fe vce(r)` 명령으로써 똑같이 구할 수 있다. 변수 라벨에서 알 수 있듯이 g2004 그룹의 경우 처치 직전인 2003년을 기준으로 한 4개 2x2 DID를 계산한다. g2006 그룹은 2006년에 처치가 시작되었고 2005년이 처치 직전 연도인데, 이 경우에는 처치 이전 시기에는 직전 연도 대비 DID를 구하고(2003-2004, 2004-2005), 처치 이후 시기에는 2005년을 기준으로 DID를 구한다(2005-2006, 2005-2007). g2007 그룹도 마찬가지로 처치 이전 시기에는 직전 연도 대비 DID를 리포트하고 처치 이후 시기에는 처치 직전 시기($g-1$) 대비 t기 DID를 리포트한다.²⁹⁾

29) 이런 방식으로 2x2 DID를 구하는 것이 연구자들에 도움이 된다고 CS(2021) 논문과 csdid 패키지 저자들이 판단한 것으로 보인다.

csdid는 이들 2x2 DID 이외에도 각 DID에 부여되는 가중치들을 자체적으로 계산한다. csdid가 계산하는 가중치는 각 그룹 내 개체수에 비례한다. 위에서는 총 12개의 DID들이 계산되었으며 그룹별 개체수는 20, 40, 131이므로 가중치들은 이 수치에 비례하고 합계 1이 나오도록 계산된다.

```
. mat l e(b)

e(b)[1,24]
      g2004:      g2004:      g2004:      g2004:      g2006:
      t_2003_2004 t_2003_2005 t_2003_2006 t_2003_2007 t_2003_2004
y1   -.01050325  -.07042316  -.13725874  -.10081136  .00652011

      g2006:      g2006:      g2006:      g2007:      g2007:
      t_2004_2005 t_2005_2006 t_2005_2007 t_2003_2004 t_2004_2005
y1   -.00275082  -.00459461  -.04122447  .03050666  -.00272589

      g2007:      g2007:      wgt:      wgt:      wgt:
      t_2005_2006 t_2006_2007 w2004_2004 w2004_2005 w2004_2006
y1   -.03108712  -.02605441  .02617801  .02617801  .02617801

      wgt:      wgt:      wgt:      wgt:      wgt:
      w2004_2007 w2006_2004 w2006_2005 w2006_2006 w2006_2007
y1   .02617801  .05235602  .05235602  .05235602  .05235602

      wgt:      wgt:      wgt:      wgt:
      w2007_2004 w2007_2005 w2007_2006 w2007_2007
y1   .17146597  .17146597  .17146597  .17146597
```

3번째 행 블록부터 wgt: 접두어가 붙은 열들이 가중치에 해당한다. 여기는 이름이 다른 방식으로 붙어 있는데, w2004_w2004에서 앞의 2004는 g2004를 의미하고 뒤의 2004는 t_2003_2004의 2004를 의미한다. g2004 그룹의 가중치는 모두 .02617801, g2006 그룹의 가중치는 모두 .05235602, g2007 그룹의 가중치는 모두 .17146597인데, 이들의 비율은 정확히 관측치수 비율, 즉 20:40:131과 동일하다. 20, 40, 131을 $4*(20+40+131)$ 로 나누면 이들 수치를 얻는다.

앞에서 여러 2x2 DID들과 가중치를 살펴보았다. 이제 이들 가중치를 사용하여 사용자가 선별한 2x2 DID들의 가중평균을 구할 수 있다. csdid는 이들 가중평균 중 전체 평균(simple), 그룹별 평균(group), 시기별 평균(calendar), 상대시기(최초 처치 시점으로부터의 시간 차이)별 평균(event)을 estat 명령으로써 구할 수 있도록 해 두었다(help csdid postestimation 도움말의 'Aggregation subcommands' 소절 참조). 먼저, 전체 평균을 구한다.

```
. qui csdid lemp, ivar(countyreal) time(year) gvar(first_treat)
```

```
. estat simple
Average Treatment Effect on Treated
```

	Coefficient	Std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
ATT	-.0399513	.012034	-3.32	0.001	-.0635375	-.016365

추정값 $-.0399513$ 은 $g-1$ 기(처치 직전 시기) 대비 처치 이후 시기 모든 ATT들의 가중평균이다. 위 예에서는 $g2004$ 의 2003년 대비 4개 값, $g2006$ 의 2005년 대비 2개 값, $g2007$ 의 2006년 대비 1개 값 등 전체 7개 값의 가중평균이다. 가중치로는 리포트된 가중치를 사용한다. 이를 다음과 같이 확인해 볼 수 있다.

```
. mata:
----- mata (type end to exit) -----
: mata clear

: function aggr(att,wgt,idx) {
>     x = att[idx]
>     w = wgt[idx]
>     x*w'/sum(w')
> }

: b = st_matrix("e(b)")

: att = b[1..12]

: wgt = b[13..24]

: (att',wgt')
           1           2
1  -0.105032462  0.0261780105
2  -0.0704231581  0.0261780105
3  -0.1372587389  0.0261780105
4  -0.1008113631  0.0261780105
5   0.065201124  0.0523560209
6  -0.0027508188  0.0523560209
7  -0.004594607  0.0523560209
8  -0.0412244715  0.0523560209
9   0.0305066556  0.1714659686
10 -0.0027258929  0.1714659686
11 -0.0310871194  0.1714659686
12 -0.0260544107  0.1714659686

: end
```

```
. * simple
. mata: aggr(att, wgt, (1,2,3,4,7,8,12))
      -.0399512752
```

마지막에 aggr 사용자함수를 호출하면서 5, 6, 9, 10, 11을 제외한 것은 처치 이전 시기에 해당하기 때문이다. 표준오차는 클러스터 방법으로 재계산된다.

그룹별 평균(estat group)은 다음과 같다.

```
. estat group
ATT by group
```

	Coefficient	Std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
GAverage	-.0310183	.0123872	-2.50	0.012	-.0552967	-.0067399
G2004	-.0797491	.0263678	-3.02	0.002	-.1314291	-.0280692
G2006	-.0229095	.0167033	-1.37	0.170	-.0556475	.0098284
G2007	-.0260544	.0166554	-1.56	0.118	-.0586985	.0065896

위에 3개 그룹(g2004, g2006, g2007)별로 사후시기 DID들의 단순평균과 이들 평균들의 가중평균(GAverage)이 리포트되어 있다. 예를 들어 g2006 그룹의 경우 2005년 대비 2개 ATT의 단순평균인데 다음과 같이 확인할 수 있다.

```
. * g2006
. mata: mean(att[7..8]')
      -.0229095392
```

리포트된 그룹별 평균들의 평균(GAverage)은 그룹별 평균들을 가중평균 한 것인데, 이때 각 그룹 평균의 가중치는 해당 그룹의 표본크기에 비례한다.

연도별 평균(estat calendar)은 다음과 같다.

```
. estat calendar
ATT by Calendar Period
```

	Coefficient	Std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
--	-------------	-----------	---	------	----------------------	--

CAverage	-.0417004	.0159719	-2.61	0.009	-.0730047	-.0103962
T2004	-.0105032	.023251	-0.45	0.651	-.0560744	.0350679
T2005	-.0704232	.0309848	-2.27	0.023	-.1311522	-.0096941
T2006	-.048816	.0201259	-2.43	0.015	-.0882619	-.00937
T2007	-.0370593	.0137471	-2.70	0.007	-.0640031	-.0101156

위에서 T2004 해당 값은 g2004 그룹의 2003년 대비 2004년 ATT이고(2004년에는 g2004 그룹만 처치상태이므로) T2005 해당 값은 g2004 그룹의 2003년 대비 2005년 ATT이다(2005년에도 g2004 그룹만 처치상태이므로). 2006년에는 g2004 그룹과 g2006 그룹이 처치상태이므로, T2006에 대하여 리포트된 -.048816은 g2004 그룹의 2006년 ATT와 g2006 그룹의 2006년 ATT의 가중평균으로서 다음과 같이 구해진다. 아래에서 (3, 7) 인덱스는 g2004 그룹의 2006년 ATT와 g2006 그룹의 2006년 ATT에 해당한다.

```
. * year 2006
. mata: aggr(att, wgt, (3,7))
-.0488159843
```

다른 연도별 평균도 이와 유사한 방식으로 구할 수 있다. 예를 들어 T2007의 경우에는 g2004, g2006, g2007 그룹의 해당 연도 가중평균이므로 (4, 8, 12) 인덱스를 사용하면 된다.

리포트된 평균(CAverage)은 연도별 평균들의 단순평균으로서, 이는 estat simple에서 구한 값과 다르다.

그룹별 처치 시작 시점 기준 '상대시기'별 평균(event)은 다음과 같다.

```
. estat event
ATT by Periods Before and After treatment
Event Study:Dynamic effects
```

	Coefficient	Std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
Pre_avg	.0018283	.007657	0.24	0.811	-.0131791	.0168357
Post_avg	-.0772398	.019965	-3.87	0.000	-.1163705	-.0381092
Tm3	.0305067	.0150336	2.03	0.042	.0010414	.0599719
Tm2	-.0005631	.0132916	-0.04	0.966	-.0266142	.0254881

Tm1	-.0244587	.0142364	-1.72	0.086	-.0523616	.0034441
Tp0	-.0199318	.0118264	-1.69	0.092	-.0431111	.0032474
Tp1	-.0509574	.0168935	-3.02	0.003	-.084068	-.0178468
Tp2	-.1372587	.0364357	-3.77	0.000	-.2086713	-.0658461
Tp3	-.1008114	.0343592	-2.93	0.003	-.1681542	-.0334685

위에서 Tp0은 그룹별로 처치 시작 시기를 의미하고 Tp1은 처치 다음 연도, Tp2는 그다음 연도 등을 의미한다. Tm1은 csdid에서 추정된 대로 g-2기와 g-1기를 비교한 것(1년 차이)이고, Tm2는 g-3기와 g-2기를 비교한 것이다(1년 차이). Tm1이라면, g2004 그룹은 해당사항이 없고, g2006 그룹은 앞의 csdid에서 리포트된 g2006 그룹의 t_2004_2005, g2007 그룹은 앞의 csdid에서 리포트된 g2007 그룹의 t_2005_2006에 해당하는 ATT들을 가중치에 따라 가중평균 한 것이다. 여타 Tmk와 Tpk도 유사한 방식으로 csdid에서 리포트된 수치들을 기간을 맞추어 가중평균 한 것이다. 다음 Tm2와 Tp1 사례를 참조하라.

```
. * event Tm2
. mata: aggr(att, wgt, (5,10))
.      -.0005630846

. * event Tp1
. mata: aggr(att, wgt, (2,8))
.      -.0509573671
```

리포트된 사전기간과 사후기간 평균들(Pre_avg와 Post_avg)은 각각 Tmk 결과 그룹과 Tpk 결과 그룹의 산술평균들이다.

사전시기 평행추세는 estat pretrend 명령으로써 검정할 수 있다.

```
. qui csdid lemp, ivar(countyreal) time(year) gvar(first_treat)

. estat pretrend
Pretrend Test. H0 All Pre-treatment are equal to 0
chi2(5) = 7.7912
p-value = 0.1681
```

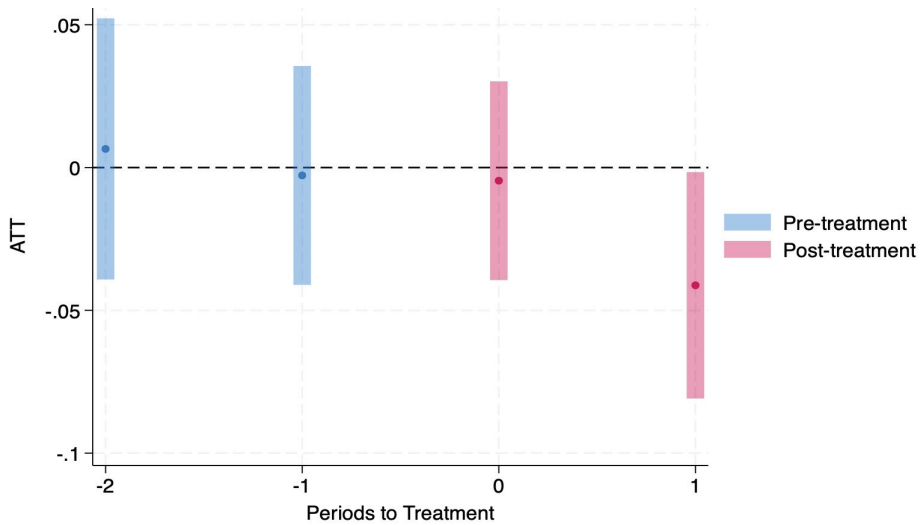
이 검정은 사전시기 2x2 DID에 해당하는 계수들이 모두 0이라는 귀무가설을 검정한 다. 사전시기에 해당하는 것은 g2006 그룹의 t_2003_2004, t_2004_2005와 g2007

그룹의 t_2003_2004, t_2004_2005, t_2005_2006으로 모두 5개이고 그 때문에 카이 제곱 분포의 자유도가 5이다. 위 결과에서 p값이 0.1681로 크므로 사전시기에 처치군과 대조군(Never Treated) 간에 추세가 동일하다는 귀무가설이 기각되지 않는다.

계수 추정값들을 그림으로 표시할 수도 있다. 예를 들어 g2006 그룹의 4개 DID 추정값들을 그림으로 표시할 수 있는데 Stata 명령과 결과는 다음과 같다.

```
. qui csdid lemp, ivar(countyreal) time(year) gvar(first_treat)
. csdid_plot, g(2006)
```

[그림 1-7] g2006 그룹의 연도별 ATT



자료: 저자 작성

위 그림은 csdid lemp, ivar(countyreal) time(year) gvar(first_treat) 명령에 의하여 계산되는 계수 추정값과 신뢰구간을 그림으로 표현한 것일 뿐이다. 횡축의 '0'은 g2006 그룹의 2005년 대비 2006년(1년 간격) DID의 추정값과 신뢰구간이고 '1'은 2005년 대비 2007년(2년 간격) DID에 해당한다. 횡축의 '-1'은 2004년 대비 2005년(1년 간격)에 해당하고 '-2'는 2003년 대비 2004년(1년 간격)에 해당하여 기준연도와 시간차이 측면에서 일관성이 없으므로 혼동하지 말아야 할 것이다.

처치시점으로부터의 상대기간과 관련된 그림은 다음과 같다. csdid 추정을 할 때 agg(event) 옵션을 사용하여 relative time별로 집계했음에 유의하라(이미 csdid 명령

의 실행이 완료되었다면 estat event로 집계만 한 후 csdid_plot 명령으로 그림을 그려도 좋다).

```
. csdid lemp, ivar(countyreal) time(year) gvar(first_treat) agg(event)
.....
Difference-in-difference with Multiple Time Periods

Number of obs = 2,500

Outcome model : regression adjustment
Treatment model: none
```

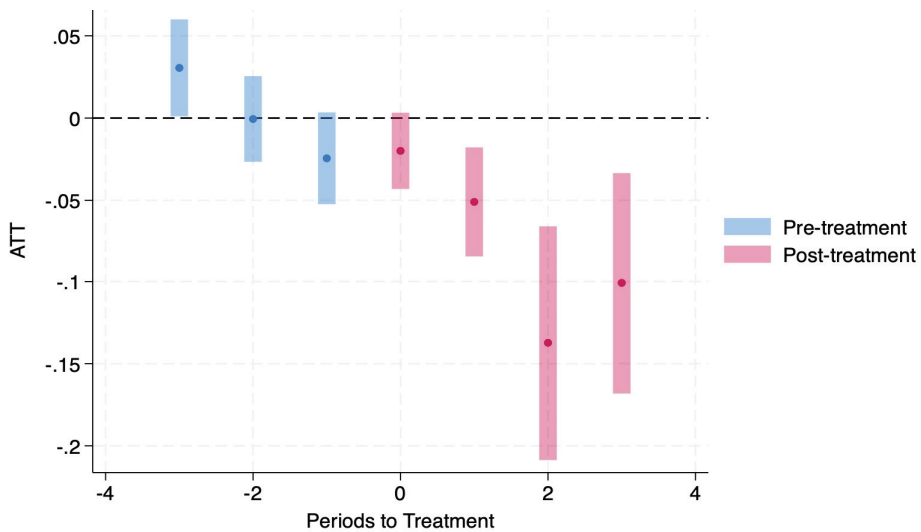
	Coefficient	Std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
Pre_avg	.0018283	.007657	0.24	0.811	-.0131791	.0168357
Post_avg	-.0772398	.019965	-3.87	0.000	-.1163705	-.0381092
Tm3	.0305067	.0150336	2.03	0.042	.0010414	.0599719
Tm2	-.0005631	.0132916	-0.04	0.966	-.0266142	.0254881
Tm1	-.0244587	.0142364	-1.72	0.086	-.0523616	.0034441
Tp0	-.0199318	.0118264	-1.69	0.092	-.0431111	.0032474
Tp1	-.0509574	.0168935	-3.02	0.003	-.084068	-.0178468
Tp2	-.1372587	.0364357	-3.77	0.000	-.2086713	-.0658461
Tp3	-.1008114	.0343592	-2.93	0.003	-.1681542	-.0334685

```
Control: Never Treated

See Callaway and Sant'Anna (2021) for details

. csdid_plot
```

[그림 1-8] 최초 처치 시점 대비 상대시기별 ATT



자료: 저자 작성

이 그림에서 횡축의 의미와 숫자들의 의미에 일관성이 없으므로 해석 시 주의를 기울여야 할 것이다. 횡축의 '-3'은 Tm3을 의미하고, 이는 g-4기 대비 g-3기 DID(1년 차이)에 해당한다. 반면 횡축의 '2'는 g-1기 대비 g+2기 DID(3년 차이)에 해당하므로 이들 숫자를 부주의하게 서로 간에 비교하는 일은 없어야 할 것이다. 그림으로 표현되면 시간에 걸친 일관성이 있다는 인상을 받기 쉬우나 사전시기와 사후시기 및 사후시기 각각에 시간 간격이 서로 다름에 유의하라.

디폴트 옵션을 사용하여 csdid를 실행하면 사후시기에는 g-1기(처치 직전)와 t기를 비교하고 사전시기에는 s-1기와 s기를 비교한다(단, g는 그룹별 최초 처치 시점). long 옵션은 사전시기의 시간 격차를 바꾸어서 g-1기가 항상 개입하도록 DID를 계산한다. 다음 예를 보자.

```
. csdid lemp, ivar(countyreal) time(year) gvar(first_treat) long
.....
Difference-in-difference with Multiple Time Periods

Number of obs = 2,500

Outcome model : regression adjustment
Treatment model: none
```

	Coefficient	Std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
g2004						
t_2003_2004	-.0105032	.023251	-0.45	0.651	-.0560744	.0350679
t_2003_2005	-.0704232	.0309848	-2.27	0.023	-.1311522	-.0096941
t_2003_2006	-.1372587	.0364357	-3.77	0.000	-.2086713	-.0658461
t_2003_2007	-.1008114	.0343592	-2.93	0.003	-.1681542	-.0334685
g2006						
t_2003_2005	.0037693	.031342	0.12	0.904	-.05766	.0651985
t_2004_2005	-.0027508	.0195586	-0.14	0.888	-.0410849	.0355833
t_2005_2006	-.0045946	.0177552	-0.26	0.796	-.0393942	.0302049
t_2005_2007	-.0412245	.0202292	-2.04	0.042	-.0808729	-.001576
g2007						
t_2003_2006	-.0033064	.0244519	-0.14	0.892	-.0512311	.0446184
t_2004_2006	-.033813	.0211292	-1.60	0.110	-.0752254	.0075994
t_2005_2006	-.0310871	.0178775	-1.74	0.082	-.0661264	.0039522
t_2006_2007	-.0260544	.0166554	-1.56	0.118	-.0586985	.0065896

```
Control: Never Treated

See Callaway and Sant'Anna (2021) for details
```

g2004 그룹은 모두 사후기간이므로 앞의 경우와 차이가 없다. 예를 들어 g2006 그룹은 사후기간의 경우 2006년 ATT와 2007년 ATT 모두 2005년을 기준시점으로 한다. 반면(long 옵션을 줄 때) 사전기간의 경우에는 2003년에서 2005년으로의 변화, 2004년에서 2005년으로의 변화에 해당하는 DID 값을 계산한다. g2007 그룹의 경우에도 사전시기에는 s년도로부터 2006년으로의 변화를 측정하고 사후시기에는 2006년으로부터 t년도로의 변화를 측정한다. 즉, long 옵션을 사용하면 항상 '미래 빼기 과거' 방식으로 DID를 계산한다.

앞에서 long 옵션에서 사전시기는 'g-1기 빼기 s기'에 해당한다고 하였다. 이것을 's기 빼기 g-1기'로 바꾸어 기준시점을 g-1기로 통일한 것이 long2 옵션이다. long2 옵션과 long 옵션을 비교하면 사후기간에 대해서는 전적으로 동일하고, 사전기간의 경우 크기는 같고 부호만 반대가 된다. 다음 결과를 보자.

```
. csdid lemp, ivar(countyreal) time(year) gvar(first_treat) long2
.....
Difference-in-difference with Multiple Time Periods

Outcome model : regression adjustment
Treatment model: none
Number of obs = 2,500
```

	Coefficient	Std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
g2004						
t_2003_2004	-.0105032	.023251	-0.45	0.651	-.0560744	.0350679
t_2003_2005	-.0704232	.0309848	-2.27	0.023	-.1311522	-.0096941
t_2003_2006	-.1372587	.0364357	-3.77	0.000	-.2086713	-.0658461
t_2003_2007	-.1008114	.0343592	-2.93	0.003	-.1681542	-.0334685
g2006						
t_2003_2005	-.0037693	.031342	-0.12	0.904	-.0651985	.05766
t_2004_2005	.0027508	.0195586	0.14	0.888	-.0355833	.0410849
t_2005_2006	-.0045946	.0177552	-0.26	0.796	-.0393942	.0302049
t_2005_2007	-.0412245	.0202292	-2.04	0.042	-.0808729	-.001576
g2007						
t_2003_2006	.0033064	.0244519	0.14	0.892	-.0446184	.0512311
t_2004_2006	.033813	.0211292	1.60	0.110	-.0075994	.0752254
t_2005_2006	.0310871	.0178775	1.74	0.082	-.0039522	.0661264
t_2006_2007	-.0260544	.0166554	-1.56	0.118	-.0586985	.0065896

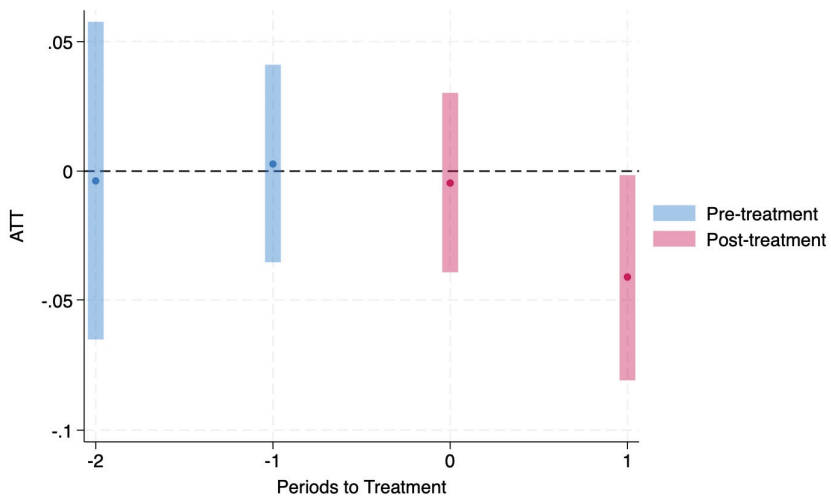
Control: Never Treated

See Callaway and Sant'Anna (2021) for details

행들의 라벨은 long 옵션의 경우와 똑같은 방식으로 붙어 있으나 long 옵션 사용 시 g2006 그룹의 t_2003_2005와 long2 옵션 사용 시 g2006 그룹의 t_2003_2005는 정 반대 의미를 가지므로 주의하여야 한다. long 옵션에서는 03년으로부터 05년으로의 변화(05년 빼기 03년)를 의미하지만 long2 옵션에서는 05년으로부터 03년으로의 변화(03년 빼기 05년)를 의미한다. long2 옵션은 모두 g-1기 대비 t기가 상대적으로 얼마나 높았는지를 의미하므로 csdid_plot으로 그린 그림은 모두 g-1기 대비 t기에 얼마나 더 높았는지를 표시한다.

```
. qui csdid lemp, ivar(countyreal) time(year) gvar(first_treat) long2
. csdid_plot, g(2006)
```

[그림 1-9] long2 옵션 사용 시



자료: 저자 작성

위 그림에서는 높낮이가 시계열 상의 높낮이를 의미한다. 하지만 이 그림도 완벽하지는 않고 독해 시 주의가 필요한데, 횡축에서 '0'은 05년 대비 06년의 상대적 크기에 해당하고, '1'은 05년 대비 07년의 상대적 크기에 해당하는 반면, 05년 대비 04년의 상대적 크기에는 '-2'가 아니라 '-1' 라벨이 붙고, '-2'는 05년 대비 03년의 상대적 크기를 의미한다. 그 결과 -2와 -1 간, 0과 1 간, 1과 2 간에는 모두 1년 차이가 있지만, -1과 0 간에는 1년이 아닌 2년의 차이가 있어 혼동을 일으키기 십상이다. 'g-1기 대비 g기'

를 0이 아닌 1로 표시했다면 Stata의 didregress 후에 estat grangerplot으로 그린 그림에 대응할 것이나, csdid 패키지의 저지들은 그렇게 하지 않았다.

디폴트 옵션, long 옵션, long2 옵션에서 기준시점과 비교시점을 정리하면 다음 표와 같다.

〈표 1-4〉 csdid에서 옵션간 비교시점의 비교

구분	디폴트 옵션	long 옵션	long2 옵션
사전시기	s기 - (s-1)기	(g-1)기 - s기	s기 - (g-1)기
사후시기	t기 - (g-1)기	t기 - (g-1)기	t기 - (g-1)기

주: g-1기는 그룹별 처치직전시점, t는 처치이후시점, s는 처치이전시점을 의미함.

구체적으로 g2006 그룹을 예로 들어 기준시점과 비교시점을 열거하면 다음과 같다.

〈표 1-5〉 csdid 옵션별 기준시점과 비교시점(g2006 그룹의 예)

연도	디폴트 옵션		long 옵션		long2 옵션	
	기준시점	비교시점	기준시점	비교시점	기준시점	비교시점
2003	-	-	2003	2005	2005	2003
2004	2003	2004	2004	2005	2005	2004
2005	2004	2005	-	-	-	-
2006	2005	2006	2005	2006	2005	2006
2007	2005	2007	2005	2007	2005	2007

모든 옵션에서 4개의 값이 계산되지만 사전기간에 서로 비교하는 시점들이 다르므로 주의하기를 바란다.

지금까지는 대조군으로 ‘Never Treated’를 사용하는 경우를 살펴보았다. 이제 ‘Not yet Treated’를 사용하는 경우를 살펴보자. csdid에서 ‘Not yet Treated’를 비교대상으로 사용하려면 notyet 옵션을 사용하면 된다. 여기서 ‘not yet treated’란 두 시점(2x2 DID이므로 두 시점)에 한 번도 처치된 적이 없는 그룹들(‘관측치’가 아니라 ‘그룹’)을 의미한다. 예를 들어 g2004 그룹의 2003년 대비 2006년 ATE를 구한다면, 대조군 관측치는 2003년과 2006년 처치상태가 아닌 g2007, g0 그룹의 해당 연도 관측치들이 된다. 다음 결과를 보자.

```

. csdid lemp, ivar(countyreal) time(year) gvar(first_treat) notyet
.....
Difference-in-difference with Multiple Time Periods

Number of obs = 2,500

Outcome model : regression adjustment
Treatment model: none

```

	Coefficient	Std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
g2004						
t_2003_2004	-.0193724	.0223101	-0.87	0.385	-.0630994	.0243547
t_2003_2005	-.0783191	.0303902	-2.58	0.010	-.1378829	-.0187553
t_2003_2006	-.1362743	.0354034	-3.85	0.000	-.2056637	-.066885
t_2003_2007	-.1008114	.0343592	-2.93	0.003	-.1681542	-.0334685
g2006						
t_2003_2004	-.0025626	.0225302	-0.11	0.909	-.046721	.0415959
t_2004_2005	-.0019392	.0190422	-0.10	0.919	-.0392612	.0353827
t_2005_2006	.0046609	.0163356	0.29	0.775	-.0273563	.036678
t_2005_2007	-.0412245	.0202292	-2.04	0.042	-.0808729	-.001576
g2007						
t_2003_2004	.0305067	.0150336	2.03	0.042	.0010414	.0599719
t_2004_2005	-.0027259	.0163958	-0.17	0.868	-.0348611	.0294093
t_2005_2006	-.0310871	.0178775	-1.74	0.082	-.0661264	.0039522
t_2006_2007	-.0260544	.0166554	-1.56	0.118	-.0586985	.0065896

```

Control: Not yet Treated

See Callaway and Sant'Anna (2021) for details

```

위 명령에는 notyet 옵션이 사용되었으므로 각 2x2 DID에서 두 기간 모두에 처치 받지 않은 그룹들의 관측치를 대조 관측치로 사용한다. 예를 들어 g2004 그룹의 t_2003_2004라면 03년과 04년에 처치되지 않은 그룹들의 관측치, 즉 g2004 그룹을 제외한 모든 관측치가 대조 관측치로 사용된다. g2004 그룹의 t_2003_2005도 마찬가지이다. 실제로 그러한지 위에 리포트된 g2004 그룹의 t_2003_2005에 해당하는 추정값 -.0783191을 TWFE로써 복원해 보자. 아래에서 2003년과 2005년의 전체 자료를 사용한 TWFE에서 d의 계수 추정값이 똑같이 -.0783191임을 확인할 수 있다.

```

. gen d = treat & year >= first_treat

. xtreg lemp d i.year if inlist(year, 2003, 2005), fe vce(cl county)

Fixed-effects (within) regression      Number of obs   =    1,000
Group variable: countyreal             Number of groups =     500

```


d	.0046609	.0163697	0.28	0.776	-.0275044	.0368262
year 2006	.0248324	.0090315	2.75	0.006	.0070861	.0425786
_cons	5.740702	.0041783	1373.92	0.000	5.732492	5.748912
sigma_u	1.5135323					
sigma_e	.12946143					
rho	.99273674	(fraction of variance due to u_i)				

하나 더 예를 들어 본다면 g2006 그룹의 t_2005_2007에 해당하는 추정값 -.0412245는 05년과 07년에 처치되지 않은 g0 그룹만을 대조군으로 사용하여 구하며, 다음과 같이 복원할 수 있다.

```
. xtreg lemp d i.year if inlist(year, 2005, 2007) & inlist(first, 2006, 0), fe
vce(cl county)
```

Fixed-effects (within) regression
Group variable: countyreal

Number of obs = 698
Number of groups = 349

R-squared:
Within = 0.0686
Between = 0.0362
Overall = 0.0008

Obs per group:
min = 2
avg = 2.0
max = 2

corr(u_i, Xb) = -0.0466

F(2, 348) = 12.01
Prob > F = 0.0000

(Std. err. adjusted for 349 clusters in countyreal)

lemp	Coefficient	Robust std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
d	-.0412245	.0202874	-2.03	0.043	-.0811257	-.0013232
year 2007	.0563241	.0116975	4.82	0.000	.0333174	.0793308
_cons	5.710612	.0052648	1084.68	0.000	5.700257	5.720966
sigma_u	1.5142498					
sigma_e	.13909474					
rho	.99163286	(fraction of variance due to u_i)				

다음으로 X 변수가 있는 경우를 생각해 보자. X 변수가 있을 때 추정하는 방법으로 csdid는 drimp, dripw, reg, stdipw, ipw, rcl 등 방법을 제공한다. 이 방법들은 method() 옵션을 이용하여 지정한다. 디폴트는 method(dripw)이다.³⁰⁾ 세부 내용은 csdid 도움말을 참조하라. 명령의 예는 다음과 같다.

```
. csdid lemp lpop, group(county) time(year) gvar(first) method(dripw)
```

csdid는 이제는 Stata에 내장된 hdidregress와 xthdidregress 명령에 구현되어 있다. 위 명령과 동일한 결과는 다음 명령으로써 얻을 수 있다.

```
. xtset county year
. gen d = first & year >= first_treat
. xthdidregress aipw (lemp lpop) (d lpop), group(county)
```

위 xthdidregress 명령에서 ‘aipw’는 ‘augmented IPW’를 의미하며 이것이 csdid의 디폴트 방법인 method(dripw) 옵션과 동일하다. 한편 ‘xthdidregress ra’는 ‘regression adjustment’를 의미하며 이것은 csdid의 method(reg) 옵션과 동일하다. 참고로, xthdidregress twfe를 사용하면 다음 절에서 설명할 Wooldridge (2021) 추정량을 구할 수 있다.

나. Wooldridge(2021)

Wooldridge(2021)는 TWFE 모형에 다양한 상호작용 항들을 포함해 필요한 DID 추정값들을 구할 수 있음을 지적한다. 사실 문제는 당초부터 처치효과가 이질적임에도 단일 터미변수를 사용하여 동일한 처치효과를 추정하려고 한 데 있다. 상호작용항들을 포함해 효과가 이질적일 수 있도록 모형을 변형하면 아무런 문제도 발생하지 않음은 당연하며, Wooldridge(2021)은 바로 이 점을 지적하고 있다. Staggered adoption 구조하

30) Doubly robust 방법들이나 IPW 방법들에는 확률역수가 사용되므로 처치확률이 1에 가까운 관측치가 있으면 불안정해질 수 있음에 유의하라. 이들 확률역수가 결부되는 방법들은 이론적으로 깔끔하나 사용은 추천하지 않는다. reg 옵션은 회귀이므로 이러한 문제가 없다.

에서 처치효과에 이질성이 있으면 다양한 더미 상호작용항을 포함시켜 이질적인 효과들을 모두 추정할 수 있으며, 이 방법은 Rios-Avila et al.의 jwddid 패키지에 구현되어 있다. 이 방법은 회귀방법이므로 jwddid는 X 변수도 회귀로 처리한다(csdid의 reg 옵션에 대응).

X 변수가 없고 'never treated'를 대조군으로 사용하면 jwddid는 csdid와 동일한 결과를 준다. 단, jwddid에서 디폴트로 사용하는 대조군은 'not yet treated'이며 'never treated'를 대조군으로 사용하려면 never 옵션을 주어야 한다. 다음 결과를 보라.

```
. use https://friosavila.github.io/playingwithstata/drdid/mpdta.dta, clear
(Written by R.)

. jwddid lemp, ivar(countyreal) tvar(year) gvar(first_treat) group never
WARNING: Singleton observations not dropped; statistical significance is biased
(link)
(MWFE estimator converged in 2 iterations)

HDFE Linear regression                    Number of obs =      2,500
Absorbing 2 HDFE groups                  F( 12,  499) =       2.87
Statistics robust to heteroskedasticity  Prob > F           =    0.0008
                                          R-squared          =    0.0288
                                          Adj R-squared      =    0.0213
                                          Within R-sq.       =    0.0001
Number of clusters (countyreal) =      500      Root MSE          =    1.4926

                                     (Std. err. adjusted for 500 clusters in countyreal)
```

lemp	Coefficient	Robust std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
first_treat#						
year#						
c._tr_						
2004 2004	-.0105032	.0233633	-0.45	0.653	-.0564058	.0353993
2004 2005	-.0704232	.0311344	-2.26	0.024	-.1315938	-.0092525
2004 2006	-.1372587	.0366116	-3.75	0.000	-.2091906	-.0653269
2004 2007	-.1008114	.0345251	-2.92	0.004	-.1686439	-.0329788
2006 2003	-.0037693	.0314934	-0.12	0.905	-.0656452	.0581067
2006 2004	.0027508	.019653	0.14	0.889	-.035862	.0413637
2006 2006	-.0045946	.0178409	-0.26	0.797	-.0396472	.030458
2006 2007	-.0412245	.0203269	-2.03	0.043	-.0811613	-.0012877
2007 2003	.0033064	.0245699	0.13	0.893	-.0449669	.0515796
2007 2004	.033813	.0212312	1.59	0.112	-.0079006	.0755266
2007 2005	.0310871	.0179638	1.73	0.084	-.004207	.0663812
2007 2007	-.0260544	.0167359	-1.56	0.120	-.0589358	.006827
_cons	5.773609	.0666494	86.63	0.000	5.642661	5.904557

Absorbed degrees of freedom:

Absorbed FE	Categories	- Redundant	= Num. Coefs
first_treat	4	0	4
year	5	1	4

이 결과는 csdid, long2 명령의 결과와 일치한다. 처치 개시 시점으로부터의 시간 차이별로 처치효과를 구하는 event study 분석 결과는 다음과 같다.

```
. estat event
```

__event__	Delta-method		z	P> z	[95% conf. interval]	
	Coefficient	std. err.				
-4	.0033064	.0245699	0.13	0.893	-.0448498	.0514626
-3	.0250218	.0181653	1.38	0.168	-.0105815	.0606252
-2	.0244587	.0142754	1.71	0.087	-.0035206	.0524381
-1	0	(omitted)				
0	-.0199318	.0118647	-1.68	0.093	-.0431862	.0033226
1	-.0509574	.0168809	-3.02	0.003	-.0840433	-.0178715
2	-.1372587	.0366116	-3.75	0.000	-.2090162	-.0655013
3	-.1008114	.0345251	-2.92	0.004	-.1684794	-.0331433

그림으로 나타내면 다음과 같다.

```
. estat plot
```


lemp	Coefficient	std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
first_treat# year# c._tr_						
2004 2004	-.0193724	.0223818	-0.87	0.387	-.0633465	.0246018
2004 2005	-.0783191	.0304878	-2.57	0.010	-.1382195	-.0184187
2004 2006	-.1360781	.0354555	-3.84	0.000	-.2057386	-.0664177
2004 2007	-.1047075	.0338743	-3.09	0.002	-.1712613	-.0381536
2006 2006	.0025139	.0199328	0.13	0.900	-.0366487	.0416765
2006 2007	-.0391927	.0240087	-1.63	0.103	-.0863634	.007978
2007 2007	-.043106	.0184311	-2.34	0.020	-.0793182	-.0068938
_cons	5.77807	.001544	3742.17	0.000	5.775036	5.781103

Absorbed degrees of freedom:

Absorbed FE	Categories	- Redundant	= Num. Coefs
countyreal	500	500	0 *
year	5	1	4

* = FE nested within cluster; treated as redundant for DoF computation

한 가지 주의할 점은 ‘not yet treated’를 대조군으로 사용할 때 jwdid는 사후시기에 대해서만 DID를 계산한다는 점이다. 또 다른 중요한 점은 csdid, notyet에 의한 결과와 값이 다르다는 사실이다. 사후시기에 대해서 결과들을 대조하면 다음과 같이 정리된다.

〈표 1-6〉 Not yet treated를 사용하는 경우 csdid와 jwdid의 비교

csdid	g2004	g2006	g2007	jwdid	g2004	g2006	g2007
2003				2003			
2004	-.0193724			2004	-.0193724		
2005	-.0783191			2005	-.0783191		
2006	-.1362743	.0046609		2006	-.1360781	.0025139	
2007	-.1008114	-.0412245	-.0260544	2007	-.1047075	-.0391927	-.043106

주: jwdid 결과가 보고되는 것에 한함. csdid와 jwdid 간에 결과가 다른 것을 진한 글씨로 표시함.
자료: 저자 작성

위에서 g2004 그룹의 2004년과 2005년에 jwdid 결과는 csdid 결과와 동일하지만 그 외에는 모두 다르다. 이는 csdid가 사용하는 대조 관측치와 jwdid가 사용하는 대조

관측치가 다르기 때문이다. csdid에서 notyet 옵션을 사용할 경우, g-1기와 사후시기 t 기를 비교하는 DID는 g-1기와 t기에 미처치 상태인 ‘그룹’들을 대조군으로 사용하는 것을 앞에서 보았다. 예를 들어 g2004 처치군의 2003년 대비 2006년 DID에서 사용되는 대조군은 g2007 그룹과 g0 그룹이며,³¹⁾ 그 추정량은 g2004, g2007, g0 코호트의 2005, 2006년 자료를 사용한 TWFE와 동일하다. 반면 jwdid는 g2004 처치군의 2006년도 ATT 추정에 2006년도까지 처치되지 않은 ‘관측치’들을 대조 관측치로 사용한다. jwdid에서 g2004 그룹의 2006년 ATT -.1360781은 다음 Stata 실행 결과와 같이 구할 수 있다. 아래에서 사용되는 관측치는 g2004 그룹 2006년 자료와 2006년까지 처치되지 않은 모든 비처치 관측치(그룹이 아니라 관측치)들, 즉 ‘first==2004 & year==2006 | !d & year<=2006’에 해당하는 관측치들이다.

```

. *gen d = treat & year >= first_treat
. xtreg lemp d i.year if first==2004 & year==2006 | !d & year<=2006, fe vce(r)

```

Fixed-effects (within) regression	Number of obs	=	1,920
Group variable: countyreal	Number of groups	=	500
R-squared:	Obs per group:		
Within = 0.0394	min =		2
Between = 0.0038	avg =		3.8
Overall = 0.0000	max =		4
corr(u_i, Xb) = -0.0161	F(4, 499)	=	21.24
	Prob > F	=	0.0000

(Std. err. adjusted for 500 clusters in countyreal)

lemp	Coefficient	Robust std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
d	-.1360781	.0354143	-3.84	0.000	-.2056576	-.0664986
year						
2004	-.0537609	.0072856	-7.38	0.000	-.0680751	-.0394468
2005	-.0419256	.0084769	-4.95	0.000	-.0585804	-.0252709
2006	-.0169144	.0116449	-1.45	0.147	-.0397935	.0059648
_cons	5.774458	.0056455	1022.85	0.000	5.763366	5.78555
sigma_u	1.504027					
sigma_e	.13600461					
rho	.99188928	(fraction of variance due to u_i)				

31) g2006 그룹의 관측치들은 2006년에 처치를 받았으므로 사용되지 않는다.

위에서 d의 계수는 <표 1-6> jwddid 패널의 g2004 그룹 2006년 ATE 값과 동일함을 확인하라.

하나 더 예를 들어 보면, jwddid에서 g2006 그룹의 2007년 ATT -.0391927는 다음 TWFE에서 d의 계수와 동일하다. 여기서 사용되는 관측치들은 g2006 그룹의 2007년 관측치들과 (2007년까지)처치되지 않은 모든 관측치다.

```
. xtreg lemp d i.year if first==2006 & year==2007 | !d & year<=2007, fe vce(r)
```

Fixed-effects (within) regression
Group variable: countyreal

Number of obs = 2,249
Number of groups = 500

R-squared:
Within = 0.0341
Between = 0.0021
Overall = 0.0000

Obs per group:
min = 1
avg = 4.5
max = 5

corr(u_i, Xb) = -0.0194
F(5, 499) = 16.37
Prob > F = 0.0000

(Std. err. adjusted for 500 clusters in countyreal)

lemp	Coefficient	Robust std. err.	t	P> t	[95% conf. interval]	
d	-.0391927	.0239825	-1.63	0.103	-.0863119	.0079265
year						
2004	-.0537609	.0072861	-7.38	0.000	-.0680761	-.0394457
2005	-.0419256	.0084774	-4.95	0.000	-.0585815	-.0252698
2006	-.0169144	.0116457	-1.45	0.147	-.0397951	.0059664
2007	.0103986	.0132664	0.78	0.434	-.0156662	.0364635
_cons	5.768037	.0063438	909.24	0.000	5.755573	5.780501
sigma_u	1.504313					
sigma_e	.14010618					
rho	.99140022	(fraction of variance due to u_i)				

이상에서 설명한 바와 같이, jwddid에서 디폴트 옵션을 사용하고(즉, never 옵션을 사용하지 않고) csddid에서 notyet 옵션을 사용할 때 대조 관측치가 서로 다르다. 예를 들어 g2006 코호트의 2006년 ATT를 TWFE로 복원하기 위해 사용하는 자료는 csddid와 jwddid에서 다음과 같다.

〈표 1-7〉 csdid와 jwdid에서 not yet treated 대조 시 사용되는 관측치의 비교

csdid	g2004	g2006	g2007	g0	jwdid	g2004	g2006	g2007	g0
2003	0	0	0	0	2003	0	0	0	0
2004	1	0	0	0	2004	1	0	0	0
2005	1	0	0	0	2005	1	0	0	0
2006	1	1	0	0	2006	1	1	0	0
2007	1	1	1	0	2007	1	1	1	0

주: 진한 청색 박스는 사용되는 자료를 나타냄. 음영은 처치군. jwdid에서 g0 코호트의 2007년 자료를 추가 사용하여도 연도 더미변수들로 인하여 결과는 동일함.
자료: 저자 작성

재차 설명하면, csdid는 해당 연도(2005, 2006년)에 처치되지 않은 ‘코호트들’(g2007, g0)을 대조군으로 사용하는 반면, jwdid는 처치 연도(2006년)까지 아직 처치되지 않은 모든 ‘관측치들’을 대조 관측치로 사용한다.³²⁾ 둘의 차이를 Stata 명령으로 비교하면 다음과 같다.

```
* csdid
xtreg lemp d i.year if inlist(first, 2006, 2007, 0) & inlist(year, 2005, 2006),
fe vce(r)
* jwdid
xtreg lemp d i.year if first==2006 & year==2006 | !d & year<=2006, fe vce(r)
```

한마디로 요약하면, csdid는 not-yet-treated ‘코호트’를 비교대상으로 사용하는 반면, jwdid는 not-yet-treated ‘관측치’를 비교대상으로 사용한다. 또한, csdid는 단일한 2x2 DID이지만, jwdid의 TWFE는 해당 연도의 처치 관측치와 모든 비처치 관측치들을 비교하므로 여러 2x2 DID들의 가중평균이 된다(음의 가중치 문제는 발생하지 않음).

X 변수가 있을 때 jwdid는 X 변수 계수의 형태를 다양하게 설정할 수 있다. jwdid의 결과는 Stata의 공식 명령어 hdidregress와 xthdidregress를 이용해서도 얻을 수 있다. 예를 들어 다음 두 명령의 결과는 동일하다.

32) X 변수가 없을 때는 모든 처치되지 않은 관측치들을 사용하여도 결과는 동일하다.

```

. jwddid lemp lpop, ivar(countyreal) time(year) gvar(first)

. *xtset county year
. *gen d = first & year >= first
. xthdidregress twfe (lemp lpop) (d), group(county)
  또한 X변수가 있고 never-treated를 대조군으로 할 때, jwddid의 결과는 csdid
에서 method(reg) 옵션을 사용한 결과와 일치한다. 말하자면 다음 두 결과는 같다.

. use https://friosavila.github.io/playingwithstata/drddid/mpdta.dta, clear
(Written by R. )

. csdid lemp lpop, ivar(county) time(year) gvar(first) method(reg) long2

. jwddid lemp lpop, ivar(count) time(year) gvar(first) never

```

내부에서 위 두 명령이 계산을 수행하는 방법은 서로 다르다. 간단한 2x2 DID를 예로 들어 설명하면, csdid는 method(reg)를 사용할 때 ‘대조군 자료’만을 사용하여 ΔY_{it} 를 X_i 에 대하여 OLS 회귀하여 이로부터 각 i 별로 $X_i b$ 를 예측하고(결측치 대체 방법) 실제 ΔY_{it} 와 이 예측된 $X_i b$ 간 차이를 처치 관측치들에 대해 평균한다. 반면 jwddid는 ‘전체 자료’를 사용하여 ΔY_{it} 를 X_i , D_i , $(X_i - \bar{X})D_i$ 에 대하여 회귀하며 이때 D_i 의 계수가 ATT가 된다. 두 방법은 회귀를 할 때 ‘대조군’ 관측치만을 사용하느냐 아니면 X와 D의 상호작용항이 포함된 모형에 대해 ‘전체’ 관측치를 사용하느냐 하는 점에서 다르다. 하지만 csdid에서 마지막에 처치군에 대한 평균을 구하고 나면 두 결과는 완전히 똑같은 점을 수학적으로 증명할 수 있다(자세한 내용에 대해서는 Wooldridge, 2010, 참조).

다. Sun and Abraham(2021)

SA(2021)은 처치효과가 이질적일 때 처치군 여부 터미와 상대시간 터미들의 상호작용항(상대시간 터미인데 미처치 그룹의 경우 0으로 설정하는 변수)을 포함하여 TWFE를 할 경우 오염 문제가 발생할 수 있음을 지적하고 그룹(코호트)들과 상대시간 터미들의 상호작용항들을 포함해 TWFE로써 그룹x상대시간별 ATT를 추정하고 이들을 상대시간 별로 집계하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 Wooldridge(2021) 방법과 거의 유사한데 한 가지 다른 사소하게 다른 점은 Wooldridge(2021) 방법은 그룹x연도 터미들과 상호작용시키는 반면 SA(2021) 방법은 그룹x상대시간 터미들과 상호작용시킨다는 것이다.

더미들을 모두 포함하면 동일한 효과를 가지므로 두 방법 간에 실질적인 차이는 없다. 또한 never-treated 그룹을 비교대상으로 할 경우에는(X 변수가 없는 경우) csdid, jwddid, SA(2021) 방법 모두 동일한 결과를 제공한다.

SA(2021) 방법은 Sun(2021 – help eventstudyinteract 참조)의 eventstudyinteract 패키지에 구현되어 있다. 변수들을 생성해야 하므로 사용이 불편하겠지만 의미는 명료하다. 다음 예를 보라.

```

1. . use https://friosavila.github.io/playingwithstata/drddid/mpdta.dta, clear
2. (Written by R. )

4. . xtset county year

6. Panel variable: countyreal (strongly balanced)
7. Time variable: year, 2003 to 2007
8.      Delta: 1 unit

10. . gen reltime = treat*(year-first_treat)

12. . forv j=4(-1)1 {
13. 2.      gen Tm`j' = treat*(reltime==`j')
14. 3. }

16. . forv j=0/3 {
17. 2.      gen Tp`j' = treat*(reltime==`j')
18. 3. }

20. . replace reltime = . if !treat
21. (1,545 real changes made, 1,545 to missing)

23. . gen altfirst = first_treat

25. . replace altfirst = . if first_treat==0
26. (1,545 real changes made, 1,545 to missing)

28. . gen never = !treat

30. . gen notyet = !treat | year < first_treat

32. . qui eventstudyinteract lemp Tm4-Tm2 Tp0-Tp3, absorb(countyreal year)
    cohort(altfirst) control_cohort(never) vce(cluster countyreal)

34. . matrix list e(b_interact)

36. e(b_interact)[3,7]
37.      Tm4      Tm3      Tm2      Tp0      Tp1      Tp2
38. 2004      0      0      0      -.01050325      -.07042316      -.13725874
39. 2006      0      -.00376929      .00275082      -.00459461      -.04122447      0
40. 2007      .003330636      .03381301      .03108712      -.02605441      0      0

42.      Tp3

```

```

43. 2004 -.10081136
44. 2006 0
45. 2007 0

47. . qui eventstudyinteract lemp Tm4-Tm2 Tp0-Tp3, absorb(countyreal year)
cohort(altfirst) control_cohort(notyet) vce(cluster countyreal)
49. . matrix list e(b_interact)

51. e(b_interact)[3,7]
52. Tm4 Tm3 Tm2 Tp0 Tp1 Tp2
53. 2004 0 0 0 -.01937236 -.0783191 -.13607811
54. 2006 0 0 0 .00251386 -.03919274 0
55. 2007 0 0 0 -.04310603 0 0

57. Tp3
58. 2004 -.10470747
59. 2006 0
60. 2007 0

```

37~45행은 never-treated 그룹을 대조군으로 사용할 때의 결과이며 52~60행은 not yet treated를 대조군으로 사용할 때의 결과이다. Never treated에 대조시킬 때의 결과는 csdid, jwdid 결과와 동일하고, not yet treated에 대조시킬 때의 결과는 jwdid의 결과와 일치한다. <표 I -6>과 비교하면 csdid와는 다르고 jwdid와 동일함을 확인할 수 있다. eventstudyinteract와 jwdid의 차이는 eventstudyinteract가 상대시기별 더미변수들을 강조한다는 점과 인터페이스 모양에 있으며 그 외에는 두 방법은 기본적으로 동일하다.

라. de Chaisemartin and D’Haultfoeuille(2020, 2024)

De Chaisemartin and D’Haultfoeuille(2020, CH) 논문은 D가 0에서 1로만 변하는 것뿐만 아니라 1에서 0으로 변하기도 하는 경우까지 포괄한다. 정책에 진입하는 경우를 ‘joiner’라 하고 정책으로부터 이탈하는 경우를 ‘leaver’라 하여 ‘joiner 효과’와 ‘leaver 효과’를 모두 식별하고자 한다. DID로 표현하자면 joiner 효과는 D=0으로 유지되는 그룹 대비 D가 0에서 1로 바뀌는 그룹을 비교하며, leaver 효과는 D=1로 유지되는 그룹 대비 D가 1에서 0으로 바뀌는 그룹을 비교한다.³³⁾ Staggered adoption 환경

33) 이것과 ‘뒤집힌 DID’는 상이함에 유의하라. 뒤집힌 DID는 D가 1로 유지되는 그룹을 통제군으로 사용하고 D가 0에서 1로 바뀌는 그룹을 처치군으로 사용한다. 반면 leaver 효과는 D가 1로 유지되는(즉, 이탈하지 않은) 그룹을 통제군으로 사용한다는 점에서는 뒤집힌 DID와 같으나 D가 1에서 0으로 바뀌는(0에서 1로 바뀌는 것이 아니라) 그룹이 처치군이 된다.

하에서는 joiner만 있으며 leaver는 없다.

CH(2020)의 방법은 did_multiplegt 패키지에 구현되어 있다. Staggered adoption 환경에서 X 변수가 없을 때 이 패키지는 csdid 패키지와 동일한 결과를 제공한다.

De Chaisemartin and D'Haultfoeuille(2024, CH) 논문은 D가 이진적이지 않은 (non-binary) 경우까지 포함한다. D의 가능한 상태별로 잠재성과 변수 $Y_{g,t}(d_1, \dots, d_T)$ 가 있고(여기서 소문자 d_1, \dots, d_T 는 함수의 인자), 초기 처치상태가 동일하고 최초 처치 상태 변화 시점이 상이한 그룹들이 존재한다고 가정한다. 초기(1기) 처치상태가 동일한 그룹들은 평행한 '가상 처치상태 불변 시(status-quo) 추세'를 갖는다고 가정한다. 예를 들어 T=3일 때, D가 0,1,0인 그룹, D가 0,0,1인 그룹, D가 0,0.5,1.5인 그룹은 모두 평행한 $Y_{g,t}(0,0,0)$ 추세를 갖는다는 가정이다. DID를 위한 비교 관측치로 초기 처치상태가 동일하면서 그 초기 처치상태가 아직 변하지 않은(not yet changed) 관측치들을 사용한다.

Stata 명령으로 did_multiplegt_dyn이 제공된다.

3. 예측접근법

가. 도입

본 소절에서 설명할 예측(imputation) 접근법은 비처치 관측치들을 이용하여 X와 Y^0 간의 함수관계를 찾은 후 이 함수에 처치 관측치들의 X값을 대입하여 Y^0 을 예측(impute)하고 이를 가상 비처치 성과(counterfactual)로 삼아 평균 처치효과를 구하는 방법이다. 가장 단순하게, 만약 $Y_{it}^0 = X_{it}\beta_t + u_{it}$ 라는 모형이 설정되었다면, 대조군 자료를 이용하여 β_t 를 추정하고, 처치 관측치 i 에 대하여 예측(forecast, impute)한 $X_{it}\hat{\beta}_t$ 를 처치 관측치 i 의 t 기 가상 비처치 성과로 간주한다. 그 후 실제 관측된 Y_{it} 로부터 $X_{it}\hat{\beta}_t$ 를 차감한 $Y_{it} - X_{it}\hat{\beta}_t$ 을 해당 관측치의 처치효과로 간주하고, 이것을 적절한 처치 관측치들에 대하여 평균함으로써 t 기 평균 처치효과(ATT)를 추정하는 것이다.

위와 같이 Y_{it}^0 의 수준에 관한 모형을 설정하면 예측접근법으로써 구하는 ATT는 이증차분이 아니라 한 번 차이를 구한 것에 해당한다. 반면 만약 증가분 $Y_{it}^0 - Y_{is}^0$ 에 관한 모형을 설정하거나 Y_{it}^0 모형에 t 별 더미변수들을 포함하면 예측접근법으로 구하는 추정량은 이중의 차이(DID)에 해당하게 된다. 예를 들어, 만약 $Y_{it}^0 - Y_{is}^0 = X_{it}\beta_{t,s} + u_{it,s}$ 로

모형을 설정할 수 있다. 그런 다음, 대조 관측치들이 모든 t 에서 $Y_{it} = Y_{it}^0$ 임에 착안하여 대조 관측치들의 $Y_{it} - Y_{is}$ 를 X_{it} 에 회귀하여 $\beta_{t,s}$ 을 추정하고, 처치 관측치 i 에 대하여 $X_{it}\hat{\beta}_{t,s}$ 을 구하면 이것이 처치 관측치 i 의 $Y_{it}^0 - Y_{is}^0$ 의 예측값이 되고 이것을 가상 비처치 증가분(counterfactual)으로 삼는다. 그리고 나서 $(Y_{it} - Y_{is}) - X_{it}\hat{\beta}_{t,s}$ 을 구하면 이것이 해당 처치 관측치의 증가분의 차이가 되고, 이 증가분의 차이를 전체 또는 선택된 i 들에 대하여 평균하면 이것이 DID에 해당하는 해당 처치 관측치들의 예측접근법 ATT 추정량이 된다.

만약 X 변수가 없으면, Y_{it}^0 수준에 관한 모형은 처치군과 통제군의 단순한 평균 차이로 귀결되고, $Y_{it}^0 - Y_{is}^0$ 증가분에 대한 모형 또는 Y_{it}^0 수준 모형이지만 t 별 더미변수들을 포함한 모형은 단순한 2x2 DID로 귀결된다. X 변수가 있다면 마지막으로 평균을 구하는 과정에서 자동으로 처치군의 X 분포에 맞추어 평균을 구하게 된다. 예를 들어 X 변수가 ‘개’인지 ‘고양이’인지 나타내는 더미변수라 하자. 처치군에 ‘개’가 40%, ‘고양이’가 60% 있고, 통제군에 ‘개’가 60%, ‘고양이’가 40% 있다면, 대조 관측치들을 사용하여 ‘개’와 ‘고양이’의 가상 성과 증분을 각각 구한다. 마지막 단계의 ATT를 구하는 과정에서 실제 성과변수의 평균은 개 40%, 고양이 60%의 평균에 해당하고, counterfactual의 평균도 이와 마찬가지로 개 40%, 고양이 60%의 평균에 해당하므로, 처치군의 평균 처치효과(ATT)를 자연스럽게 얻게 된다.

X 변수가 관측되는 경우 그 계수(β)에 대하여 다양한 모형을 설정할 수 있다. 위에서는 t 에 의존하는 경우에 대하여 설명하였는데, 이 경우 계수가 모든 그룹에서 동일하므로 대조군 자료를 이용해 계수를 추정하여 처치군 계수로 사용할 수 있다. β 가 i 또는 그룹에 의존하도록 설정할 수도 있는데, 그 경우에는 다른 개체 또는 그룹 자료를 사용해서는 β_i 에 대한 정보를 얻을 수 없으므로 동일 i 또는 해당 그룹의 처치 이전 데이터를 사용하여 β_i 를 추정한다. 이 경우에는 물론 β_i 를 공유하는 비처치 관측치들이 많아야 β_i 를 제대로 추정할 수 있을 것이다. β 가 모든 시기와 개체들에서 동일하다고 설정되면 모든 비처치 관측치들을 사용하여 이를 추정할 수 있다. 어느 경우에도 X_{it} 는 처치에 의존하지 않는(외생적인) 변수이어야 한다. 만약 그렇지 않으면 가상 비처치 성과인 Y^0 을 처치하의 변수로써 설명하는 것이 되어 모순이 발생하고, 이를 다른 말로 표현하면 X_{it} 를 통제함으로써 처치효과의 일부를 통제하는 셈이 되기 때문이다.

이하에서는 예측접근법과 관련하여 Borusyak et al.(2024, BJS)의 논의사항과 요인 모형으로의 확장에 대하여 살펴본다.

나. Borusyak, Jaravel, and Spiess(2024)

BJS(2024)가 고려하는 모형은 $Y_{it}^0 = \alpha_i + \gamma_t + A_{it}\lambda_i + X_{it}\delta + \varepsilon_{it}$ 이다. A_{it} 와 X_{it} 는 관측되는 변수이며, A_{it} 의 계수들 λ_i 는 i 마다 상이하고 X_{it} 의 계수 δ 는 모두 동일하다. 수식에는 표시하지 않았지만 계수가 t 마다 다른 변수를 포함할 수도 있다. λ_i 의 경우 처치 이전 데이터로부터 정보를 얻으며 δ 의 경우 모든 비처치 관측치들로부터 정보를 얻는다. 실제 추정 시에는 전체 비처치 관측치들을 이용하면서 다양한 더미변수들과의 상호작용항을 포함해서 한꺼번에 추정하는 것이 간편하다. 계수들이 추정되고 나면 처치 관측치들의 A_{it} 와 X_{it} 값을 대입하여 처치 관측치의 가상 비처치 성과(counterfactual) Y_{it}^0 을 예측한다. $\hat{\alpha}_i + \hat{\gamma}_t + A_{it}\hat{\lambda}_i + X_{it}\hat{\delta}$ 을 \hat{Y}_{it}^0 이라 하면 ATT는 적절한 i 와 t 에 대하여 $Y_{it} - \hat{Y}_{it}^0$ 의 평균을 구함으로써 추정한다. 가상 비처치 성과(counterfactual) 추산 시 t 고정효과를 포함하므로 기본으로 DID를 구하는데, 단순한 차이를 구하고 싶으면 t 고정효과를 제외하면 될 것이다.

BJS (2024)는 ATT 추정량의 표준오차를 구할 때 특별한 고려를 한다. 예측접근법은 기본적으로 처치효과가 i 와 t 에 따라 상이할 수 있도록 허용한다. $Y_{it}^1 = \tau_{it} + Y_{it}^0$ 이라 하면 τ_{it} 에 i 와 t 첨자가 있어 i 와 t 에 따라 이질적일 수 있다. 이 경우 λ_i 와 δ 를 정확히 아는 이상적인(하지만 비현실적인) 상황에서 처치 관측치에서 추정되는 ‘처치효과’는 τ_{it} 가 아니라 $\tau_{it} + \varepsilon_{it}$ 이다. 즉, ‘처치효과’의 추정량에는 처치효과 τ_{it} 뿐 아니라 오차항인 ε_{it} 까지 포함되어 있다.³⁴⁾ 이는 예측의 신뢰구간에 관한 계량경제학 교과서에 표준적으로 등장하는 내용이다(예를 들어 Wooldridge, 2020, 6-4절, 한치록, 2024a, 11.6절). BJS (2024)는 이 경우 ε_{it} 와 계수 추정량들의 부정확성으로 인한 표준오차만을 구하고자 한다.³⁵⁾ 만약 τ_{it} 가 모두 동일하다면 ATT의 추정량에 내재하는 확률적 변동을 표본으로부터 유추하여 표준오차를 구하는 것은 표준적인 과정이다. 하지만 BJS(2024)는 이로부터 ε_{it} 으로 인한 변동분과 τ_{it} 의 차이로 인한 변동분을 서로 구분하고자 하는데, 이들을 구분하여 별도로 식별하는 것은 추가적인 가정 없이는 불가능하다. BJS(2024)는 특정 변수로써 구분하는 집단 내에서 τ_{it} 가 동일하다는 가정을 표준오차 계산 시 도입한

34) 실제로는 λ_i 추정량, δ 추정량, 고정효과들의 추정량에 부정확성 부분이 추가된다.

35) 이는 표본추출 반복시행 시 τ_{it} 는 고정된 상태에서 ε_{it} 만 확률적으로 변동하는 경우를 상정하는 것인데 τ_{it} 고정의 의미가 불명확한 경향이 있다.

다. 즉, 동일 집단 ‘내’ $Y_{it} - \hat{Y}_{it}^0$ 의 차이가 오차로 인한 것으로 간주된다.

BJS(2024)의 추정방법은 did_imputation 패키지에 구현되어 있다. 구문 형식은 did_imputation Y i t Ei [if] [in] [estimation weights] [, options]이며 중요한 옵션은 avgeffectsby(varlist)이다. 이 avgeffectsby() 옵션을 사용하여 표준오차를 구할 때 τ_{it} 가 동일한 집단을 지정해 준다. 이 집단들이 너무 촘촘하게 지정되면, 즉 한 집단 내 관측치 수가 적으면, ε_{it} 으로 인한 변동분도 τ_{it} 의 이질성에 기인하는 것으로 오인될 수 있다(overfit의 일종). 실제 연구자에게 어떤 방식으로 이 집단을 지정할지 객관적으로 주어지는 정보는 없으며, 연구자가 적절하게 판단할 문제이다.³⁶⁾ 다음 예를 보자. Cloud et al (2023) 자료를 사용하며,³⁷⁾ 파일명은 monthly-panel.dta이다.

```

. use replication/data/monthly-panel, clear

. did_imputation Y city_id month_stat month_intro, ///
> horizons(0/18) pretrend(12) avgeffectsby(cohorts_half_year) leaveout

```

Number of obs = 6,803

Y	Coefficient	Std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
tau0	.0343111	.0257952	1.33	0.183	-.0162466	.0848688
tau1	-.0029815	.0354974	-0.08	0.933	-.0725552	.0665922
tau2	.0636813	.0280724	2.27	0.023	.0086605	.1187022
tau3	.0789977	.0258465	3.06	0.002	.0283394	.1296559
tau4	.037892	.0303062	1.25	0.211	-.0215072	.0972911
tau5	-.021281	.040242	-0.53	0.597	-.1001538	.0575919
tau6	-.0213949	.029205	-0.73	0.464	-.0786357	.0358459
tau7	.0098431	.0270063	0.36	0.716	-.0430882	.0627744
tau8	.0073837	.0293719	0.25	0.802	-.0501841	.0649515
tau9	.0313422	.030999	1.01	0.312	-.0294146	.0920991
tau10	.07601	.030623	2.48	0.013	.0159899	.13603
tau11	.0887683	.0347464	2.55	0.011	.0206667	.1568699
tau12	.0629056	.0452814	1.39	0.165	-.0258444	.1516555
tau13	.0641814	.0435682	1.47	0.141	-.0212106	.1495735
tau14	.1181225	.0370207	3.19	0.001	.0455634	.1906817
tau15	.07106	.0386746	1.84	0.066	-.0047407	.1468608
tau16	.021677	.0367821	0.59	0.556	-.0504146	.0937686
tau17	.004703	.0410708	0.11	0.909	-.0757943	.0852004
tau18	-.0035541	.048345	-0.07	0.941	-.0983086	.0912003
pre1	-.0162372	.0310145	-0.52	0.601	-.0770246	.0445502

36) 이렇게 특정 그룹별 평균을 차감함으로써, 그룹을 촘촘하게 하면 표준오차가 작아지고 유의성이 커진다. 그룹 선택의 자의성과 관련되는 잠재적인 논란은 연구자가 감당하여야 한다.

37) 이 자료는 European Economic Journal의 Cloud et al.(2023) 논문 해당 웹페이지에 기재된 online appendix로부터 내려받을 수 있다. 2026. 1. 19. 현재 URL은 <https://ars.els-cdn.com/content/image/1-s2.0-S0014292123002210-mmcl.zip>, 검색일자 2026.1.19.

pre2	-.008682	.0335236	-0.26	0.796	-.0743871	.057023
pre3	-.0625822	.0263206	-2.38	0.017	-.1141696	-.0109948
pre4	-.0194858	.0254517	-0.77	0.444	-.0693701	.0303985
pre5	-.0196656	.0290946	-0.68	0.499	-.0766899	.0373587
pre6	-.0255311	.025596	-1.00	0.319	-.0756983	.024636
pre7	.0203554	.0230534	0.88	0.377	-.0248284	.0655393
pre8	-.0140516	.030499	-0.46	0.645	-.0738286	.0457253
pre9	.0225242	.0239912	0.94	0.348	-.0244976	.069546
pre10	.0240581	.0265296	0.91	0.364	-.0279391	.0760552
pre11	-.0036746	.0280415	-0.13	0.896	-.0586349	.0512858
pre12	.0032729	.0263883	0.12	0.901	-.0484472	.0549931

성과변수는 Y, i 변수는 city_id, t 변수는 month_stat, 처치 시점 코호트 변수는 month_intro이다. avgeffectsby(cohorts_half_year) 옵션에 의하여 cohorts_half_year 변수의 값이 동일한 관측치들 내에서는 (개별)처치효과가 동질적이라고 가정한다. leaveout 옵션은 표준오차를 구하기 위해 동일 집단 처치효과 평균을 차감할 때 자신은 제외하고 평균을 구하도록 한다. horizons(0/18) 옵션은 상대시간 0~18에 대해 평균 처치효과를 리포트함을 의미한다(allhorizons는 모든 가용기간에 대하여 리포트). 'pre' 로 시작하는 레이블들은 피설명변수를 X 변수들(계수가 i 나 t 마다 다르면 더미변수들과 적절히 상호작용)과 처치이전 각 상대기간 더미변수들(미처치 그룹은 모든 더미변수를 0으로 설정)에 대하여 D=0인 관측치들만을 이용하여 OLS 회귀할 때 상대기간 더미변수들의 계수를 의미한다. pretrend(12)는 이를 pre1~pre12에 대하여 계산하도록 한다.³⁸⁾ 이 더미변수들을 이용하여 사용된 X 변수들이 Y^0 를 충분히 설명하고 그 외의 추가적인 체계적 요인은 없는지 확인할 수 있다.³⁹⁾

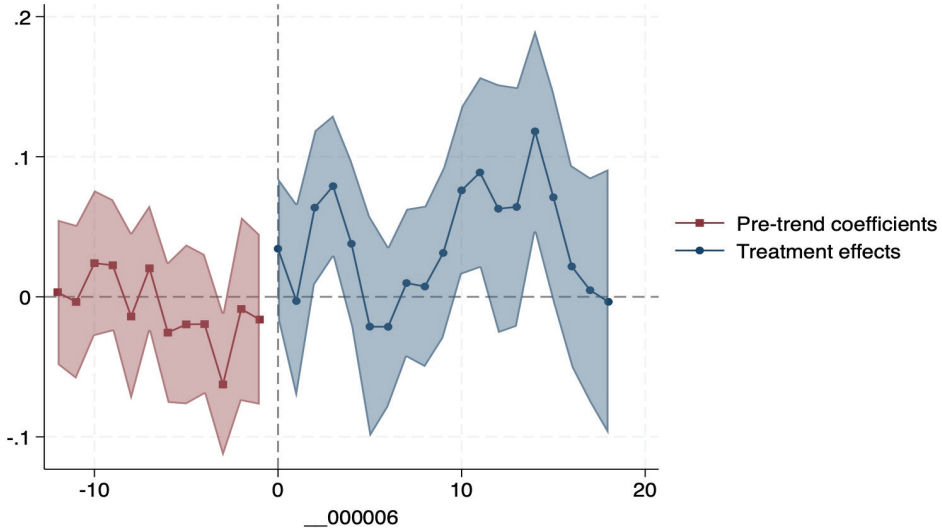
개별 처치효과 추정치들의 평균을 구하여 평균 처치효과를 구할 때 특정 관측치들에 대한 평균을 구하려면 wtr 옵션을 사용한다. 예를 들어 wtr(dum1 dum2 dum3)과 같이 하면 각 더미변수 값이 1인 처치 관측치들에 대하여 구한 3개의 평균 처치효과를 리포트한다. 그 외에도 Y0 회귀에서 고정효과를 fe(varlist) 옵션에 의하여 줄 수 있다. 그러면 varlist에 열거된 변수들의 값에 따라 그룹으로 나누고 각 그룹에 고정효과를 부여한다. 계수가 i 마다 다른 변수들은 unitcontrols(varlist) 옵션으로 지정하고 계수가 t 마다 다른 변수들은 timecontrols(varlist) 옵션으로써 지정한다. 계수가 공통인 변수들을 지정할 때는 controls(varlist) 옵션을 사용한다. event_plot 명령으로 그림도 그릴 수 있다.

38) 모든 가능한 사전 상대기간 더미변수들을 전부 사용하도록 할 때에 2개가 아닌 1개 사전기간만 기준시점으로서 제외되는데 이는 이 패키지가 DID가 아닌 레벨 비교를 하기 때문이다.

39) 그러므로 사전 상대기간 더미변수들의 계수는 모두 0이어야 모형이 타당한 것으로 해석된다.

```
. event_plot, default_look
```

[그림 1-11] did_imputation 패키지를 이용한 그림



자료: 저자 작성

다. 요인모형

앞 소절의 BJS(2024) 방법은 처치 관측치의 Y^0 을 예측할 때 X 변수들을 활용한 다. 대조 관측치들에서 관측되는 Y 와 X 의 관계 추정 결과를 적용하여 처치 관측치들에서 주어진 X 정보를 바탕으로 Y^0 을 예측한다. 요인모형(factor models)은 여기에 추가하여 비관측 요인들로 인한 그룹 간 상이한 추세를 반영하여 Y^0 을 예측하고자 한다. 모형은 $Y_{it}^0 = \alpha_i + X_i \delta_i + F_i \lambda_i + u_{it}$ 이다. 단, 우변에서 X_i 만이 관측되고 α_i , F_i , λ_i 는 관측되지 않는다. α_i 는 개별 고정효과이며 관측되지 않지만 소거가 가능하다. u_{it} 는 오차항이다. 만약 사전기간 관측치가 많다면 λ_i 를 비교적 정확히 추정할 수 있을 것이다. 하지만 사전기간 관측치가 적으면 λ_i 의 추정이 어렵다. Callaway and Karami (2023)는 $F_{g-1} \neq F_{g-2}$ 라는 가정을 도입하여 이 문제를 해결하고자 한다. $F_{g-1} \neq F_{g-2}$ 이면 (F_i 가 스칼라일 때) $\Delta Y_{ig-1}^0 = X_i(\Delta \delta_{g-1}) + (\Delta F_{g-1})\lambda_i + \Delta u_{ig-1}$ 를 λ_i 에 대하여 정리하여 $\lambda_i = (\Delta Y_{ig-1}^0 - X_i \Delta \delta_{g-1} - \Delta u_{ig-1}) / \Delta F_{g-1}$ 을 얻고 이를 원래 식에 대입하여 다음 추약식을 얻을 수 있다.

$$Y_{it}^0 - Y_{ig-1}^0 = X_i(\delta_t^* - \Delta\delta_{g-1}F_t^*/\Delta F_{g-1}) + \Delta Y_{ig-1}^0(F_t^*/\Delta F_{g-1}) \\ + u_{it} - u_{ig-1} - \Delta u_{ig-1}F_t^*/\Delta F_{g-1}$$

단, $\delta_t^* = \delta_t - \delta_{g-1}$, $F_t^* = F_t - F_{g-1}$. 이 축약식은 좌변이 $Y_{it}^0 - Y_{ig-1}^0$ 이고 우변이 X_i , ΔY_{ig-1}^0 인 회귀식이다. 그런데 설명변수 중 하나인 ΔY_{ig-1}^0 과 오차항이 상관되기 때문에 내생성이 있으며, 따라서 도구변수가 필요한데, 적절한 도구변수를 찾기는 도전적일 수 있다.

최근 Park (2025)는 개체 i 의 그룹 할당(G_i 라 하자)을 ordered probit으로 모형화하여 Heckman 식 편향교정항을 도출하고 도구변수 없이도 편향 없는 예측을 하는 방법을 제안하였다. F_t 가 주어진 상태에서, $E(\lambda_i | X_i, G_i)$ 가 G_i 에 의존하지 않으면 X_i 통제 시 평행추세가 성립하는 것이므로 추정에 문제가 발생하지 않는다. 반면, 만약 $E(\lambda_i | X_i, G_i)$ 가 G_i 에 의존하면 F_t 로 인하여 그룹별로 추세가 달라 처치 관측치들의 가상 비처치 성과를 동일시기 미처치 관측치들로부터 추론할 수 없게 된다. Park(2025) 방법의 핵심은 G_i 를 ordered probit으로 모형화함으로써 $E(\lambda_i | X_i, G_i)$ 를 미지의 상수(G_i 에 의존하지 않는 상수)와 X_i, G_i 의 추정가능한 함수의 곱으로 표현할 수 있게 되어, 미지의 상수를 미처치군을 이용하여 추정함으로써 $F_t\lambda_i$ 항으로 인하여 그룹마다 상이한 추세 차이를 보정할 수 있도록 해 주는 데 있다. G_i 의 순서를 정하지 않고서는 이질적인 그룹들을 동질화할 방법이 없다. 아래에 DGP가 $Y_{it}^0 = X_i\beta_t + F_t\lambda_i + u_{it}$ 이고 그룹이 $G_i^* = X_i\pi + v_i$ 라는 잠재변수에 의하여 ordered probit으로 결정되며 $\tau_{gt} = \max(t - g, 0)$ 인 데이터를 생성하여 실험한 결과가 있다. 우선 데이터의 구조를 살펴보면 다음과 같다.

```
. use park_sim3, clear
(Simulated data generated with te = tid - first_treat)
```

```
. tab first_treat
```

first_treat	Freq.	Percent	Cum.
0	31,165	62.33	62.33
2	5,465	10.93	73.26
4	3,625	7.25	80.51
5	9,745	19.49	100.00
Total	50,000	100.00	

```
. tab tid
```

tid	Freq.	Percent	Cum.
1	10,000	20.00	20.00
2	10,000	20.00	40.00
3	10,000	20.00	60.00
4	10,000	20.00	80.00
5	10,000	20.00	100.00
Total	50,000	100.00	

이 데이터에 대하여 csdid의 방법을 적용하면 결과는 다음과 같다.

```
. csdid Y X, ivar(pid) time(tid) gvar(first_treat) notyet agg(event)
```

```
.....
Difference-in-difference with Multiple Time Periods
```

Number of obs = 50,000

```
Outcome model : least squares
Treatment model: inverse probability
```

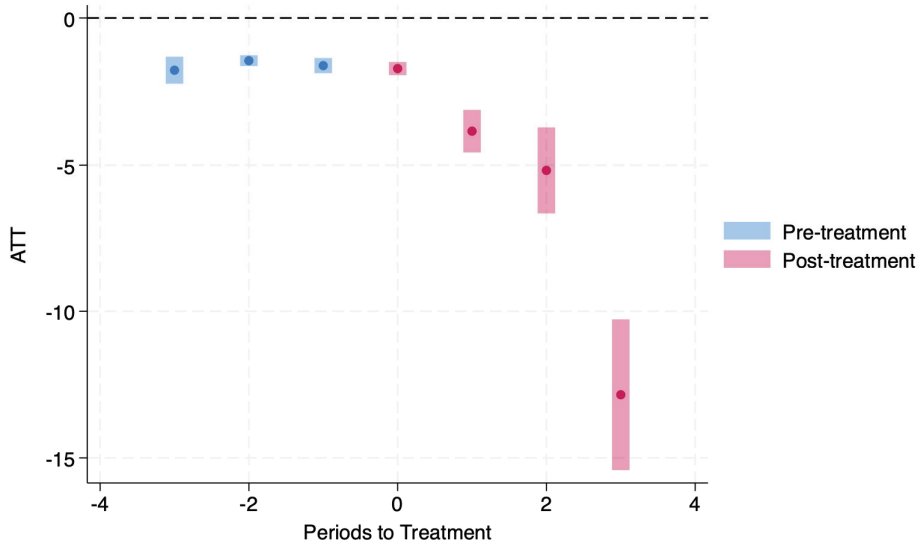
	Coefficient	Std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
Pre_avg	-1.613874	.1186447	-13.60	0.000	-1.846413	-1.381335
Post_avg	-5.896645	.4814664	-12.25	0.000	-6.840302	-4.952989
Tm3	-1.774192	.2346231	-7.56	0.000	-2.234045	-1.314339
Tm2	-1.450134	.0933824	-15.53	0.000	-1.63316	-1.267108
Tm1	-1.617295	.1314466	-12.30	0.000	-1.874926	-1.359665
Tp0	-1.718104	.1133897	-15.15	0.000	-1.940344	-1.495865
Tp1	-3.844581	.3683175	-10.44	0.000	-4.56647	-3.122691
Tp2	-5.176972	.7447463	-6.95	0.000	-6.636648	-3.717296
Tp3	-12.84692	1.311339	-9.80	0.000	-15.4171	-10.27675

```
Control: Not yet Treated
```

```
See Callaway and Sant'Anna (2021) for details
```

```
. csdid_plot
```

[그림 1-12] 생성한 자료에 csdid를 적용한 결과



자료: 저자 작성

그림으로부터 알 수 있듯이 사전시기에 평행추세 가정은 성립하지 않는다고 보아도 좋다(청색 막대로 표시한 95% 신뢰구간이 모두 0으로부터 유의하게 벗어나 있다). 이는 csdid에 X 변수를 포함해 X 변수로 인한 추세 차이를 반영하였음에도 불구하고 그러하다.

요인모형 형태로 관측되는 사전시기의 상이한 추세가 사후시기에도 지속된다고 가정하고 추세를 동질화할 수 있다. 상이한 추세를 X 변수로는 통제할 수 없었으므로 이는 X 변수의 계수가 이질적임을 의미하고 그로 인하여 미처치 관측치들을 이용한 처치 관측치의 가상 성과 imputation은 추가적인 가정 없이는 불가능하다. 이에 그룹 선택에 ordered probit 모형을 가정하여 Park(2025)의 방법으로 '교정항'을 만들어 계수들을 동질화하고, 비교 가능하게 만들어 추정하면 다음 결과를 얻는다.

```

. program define Estimate, eclass
1. args t2 t1 first_treat
2. local dy = "Y`t2'`t1'"
3. qui reg `dy' X lam if first_treat==0 | first_treat > `t2', nocons
4. tempvar dyhat teff
5. qui predict `dyhat', xb
6. qui gen `teff' = `dy' - `dyhat'
7. su `teff' if first_treat==`first_treat', meanonly
8. scalar att = `r(mean)'
9. ereturn scalar att = att
    
```

```

10.      di      "{txt}ATT({res}`t2'{txt},{res}`t1'{txt})      for      group
{res}g`first_treat'{txt} (truth = {res}`t2`-`first_treat'"{txt}) = {res}" att
as txt
11. end

. Estimate 2 1 2
ATT(2,1) for group g2 (truth = 0) = -.09142322

. Estimate 3 1 2
ATT(3,1) for group g2 (truth = 1) = 1.0013015

. Estimate 4 1 2
ATT(4,1) for group g2 (truth = 2) = 1.8400969

. Estimate 5 1 2
ATT(5,1) for group g2 (truth = 3) = 2.8724801

. Estimate 4 3 4
ATT(4,3) for group g4 (truth = 0) = -.12843247

. Estimate 5 3 4
ATT(5,3) for group g4 (truth = 1) = .82440209

. Estimate 5 4 5
ATT(5,4) for group g5 (truth = 0) = -.00418639

```

위에서 추정값이 참값(괄호 안에 truth)과 유사함을 확인할 수 있다.

요인모형에 대해서 주의할 점이 있다. 요인모형은 $F_t \lambda_i$ 형태의 추세를 인정한다는 의미를 가지며 이는 불가피하게 외삽(extrapolation) 문제를 가질 수밖에 없다. 예를 들어 $F_t = t$ 라면 λ_i 의 차이로 인하여 처치 이전에 그룹 간 격차가 벌어지고 있었으면 가상성과는 영원히 동일하게 지속되는 격차 추세를 가질 것이라고 가정한다. 이 외삽 문제에도 불구하고 요인모형은 사전시기 추세가 상이한 경우 '설정된 함수 형태가 지속될 것으로 믿을 때 추정되는 정책효과'를 제공할 수 있다는 점에서 의의를 갖는다.

한편, 평행추세 여부가 불분명할 때 Rambachan and Roth(2023, RR)는 사전기간에 보이는 평행추세 위배 정도를 반영하여 DID 신뢰구간을 조정해 주는 방법을 제안하였다. 이 방법을 간략히 설명하면, ATT 추정치는 올바른 ATT와 추세 차이로 구성될 것이다. 물론 그렇다고 하여 올바른 ATT와 추세 차이를 분해하여 식별할 수 있는 것은 아니다. 이에 사전시기에 관측되는 DID 절댓값의 최대 \bar{M} 배 크기까지 사후시기 DID에 추세 차이가 포함되어 있을 수 있다고 가정하고, 사후시기 DID에 그만큼을 반영한 신뢰구간을 재설정한다(\bar{M} 는 연구자가 선택).

이상에 설명한 방법은 honestdid 패키지에 구현되어 있다. honestdid 패키지는 Staggered DID에만 적용되는 것이 아니며 또한 별도 추정방법을 구현한 것도 아니다.

이는 csdid, did_imputation 등 타 패키지를 이용한 추정 결과가 주어질 때 평행추세 가정의 위배 정도를 감안하여 신뢰구간을 재계산하는 패키지이다. 아래에 예제를 이용하여 설명한다.

```
. use https://friosavila.github.io/playingwithstata/drdid/mpdta.dta, clear
(Written by R. )

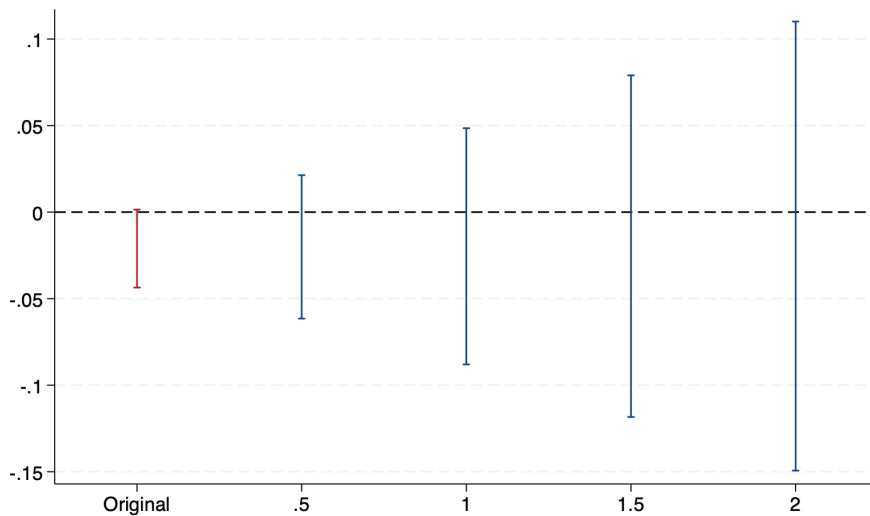
. qui csdid lemp lpop, ivar(countyreal) time(year) gvar(first_treat) agg(event)

. honestdid, pre(3 4 5) mvec(0.5(0.5)2) post(6 7 8 9) coefplot
```

M	lb	ub	
.	-0.044	0.001	(Original)
0.5000	-0.062	0.021	
1.0000	-0.088	0.048	
1.5000	-0.118	0.079	
2.0000	-0.149	0.110	

(method = C-LF, Delta = DeltaRM, alpha = 0.050)

[그림 1-13] honestdid를 이용한 신뢰구간



자료: 저자 작성

상이한 추세를 허용하는 폭이 커질수록 신뢰구간이 넓어지는 것을 확인할 수 있다.

[보론] 매칭과의 비교

연구자는 보통 모집단을 처치군으로 한정하여, 처치군 관측치들의 실제 성과와 가상 비처치 효과 간 차이의 평균(ATT)에 관심을 둔다. 본 보론에서는 이 장에서 논의한 여러 추정법들이 이 '모집단을 처치군으로 한정'하는 것을 어떤 방식으로 구현 또는 반영하는지 살펴본다. 만약 X 변수가 없으면 처치군과 대조군의 모집단이 상이하다고 말하는 것은 무의미하다. 그러므로 이 논의는 모두 X 변수가 있을 때만 의미를 갖는다.

처치군과 대조군의 '분포'는 X 의 분포를 의미한다. 두 집단 간에 X 의 분포가 동일하면 처치군과 대조군을 비교할 때 둘을 엄밀히 구분하지 않아도 되므로 크게 유의할 것이 없다. 두 집단의 분포가 다른 경우에는 유의하여야 한다. 이 경우, 받침이 겹치지 않거나 겹치는 부분이 적을 수 있고, 아니면 받침은 유사한데 그 분포가 서로 다를 수도 있다. 전자의 경우를 예로 들면, X 가 학력일 때 처치군은 학력이 고졸 이하이고 대조군은 학력이 초대졸 이상인 경우이다. 다른 예로, X 가 소득수준이라면 처치군은 말하자면 연소득 1천만원 미만이고 대조군은 연소득 1천만원 이상인 경우이다. 정책효과 분석방법은 궁극적으로 들어가면 모두 대조군과 처치군을 비교하는 방법이고, 만약 X 의 받침이 두 그룹 간에 겹치지 않거나 겹치는 부분이 적으면, 겹치는 부분만을 이용하여 분석하거나 아니면 외삽하는(즉, 대조군 자료에서 발견되는 함수관계를 그대로 처치군으로 확장하는) 해결책만이 있을 뿐이다. 겹치는 부분만을 사용하면 모집단을 바꾼다는 문제가 있고, 외삽은 그 자체로 위험하다. 만약 X 의 받침이 겹치지만 분포가 다르다면 문제 해결이 가능하다. 이 경우 예를 들어 보면, 처치군은 '개' 40%, '고양이' 60%로 구성되고 대조군은 '개' 60%, '고양이' 40%로 구성되는 경우이다. 이때에는 처치군의 분포에 따라 처치효과를 평균함으로써 ATT를 구할 수 있다.

ATT, ATU, ATE의 차이에 대하여 잠깐 살펴보자. '개'의 평균 처치효과가 1, '고양이'의 평균 처치효과가 0이라 하자. 그러면 ATT(처치효과를 처치군에 대하여 평균한 것)는 처치군에서 개가 40%이므로 0.4가 된다. 반면 ATU(처치효과를 대조군에 대하여 평균한 것)는 대조군에서 개가 60%이므로 0.6이다. 전체 모집단에서의 평균 처치효과(ATE)를 구하기 위해서는 전체 모집단에서 '개'와 '고양이'의 비율을 알아야 한다. 예를 들어 대조군이 처치군의 3배라면 전체 모집단에서 '개'와 '고양이'의 분포는 $(40+60*3):(60+40*3) = 220:180$ 이므로 $ATE = 220/400 = 0.55$ 이다. 만약 처치군과 대조군의 '개'와 '고양이' 비율이 동일하다면 $ATT = ATU = ATE$ 일 것이나 이 예에서는 그렇지 않다. 또한, 만약 처치효과가 X 에 의존하지 않는다면(이 예에서 '개'의 평균 처치효과와 '고양이'의 평균 처치효과가 동일하다면) $ATT = ATU = ATE$ 일 것이다. 그 외에는 ATT와 ATU가 다르다. 연구자들은 보통 처치군의 분포에 맞추어 평균 처치효과를 구하고자 한다.

예측접근법(결측치 대체 방법)에서는 처치 관측치들에 대하여 Y_i^0 을 예측하고, $Y_i - \hat{Y}_i^0$ 을 처치 관측치들에 대하여 평균을 구함으로써 ATT를 구한다. 여기서 $Y_i - \hat{Y}_i^0$ 을 '처치 관측치'들에 대하여 평균을 구하기 때문에 자동으로 ATT를 추정하게 된다.⁴⁰⁾ 그러므로 이하에서는 더미변수법과 관련해서만 ATT 추정 문제를 고려한다.

우선 csdid에 구현된 방법들을 살펴보자. 도움말에 의하면 이 패키지는 X 변수 처리방법을 method() 옵션으로써 설정할 수 있으며 가용방법으로는 drimp, dripw, reg, stdipw, ipw, rc1이 있다. 이 중 method(reg)는 선형회귀 방법을 사용하며, 대조군 선택과 X 변수 계수 모양의 선택이 동일하면 이는 jwdd나 eventstudyinteract와 동일한 결과를 준다. 이들 방법은 그룹 간 X 분포의 받침(support)의 상이성에 대한 고려 없이 그냥 회귀방법을 사용한다. 그래서 만약 X 변수의 받침이 그룹 간에 상이하면 대조군에서 추정된 결과를 통제군에 그대로 적용하는 외삽의 문제가 발생할 수 있다. 하지만, ATT를 구하기 위해 X 의 분포를(앞에서 '개'와 '고양이' 분포의 예처럼) 처치군에 맞추어 평균을 구하는 것은 잘 처리되어 있다. X 분포 문제는 자동으로 해결되므로, 만약 $X_i b$ 가 가상 비처치 성과(또는 그 증가분)를 올바르게 추정한다면 이 '회귀' 방법은 잘 작동할 것이다.

ipw 등 $\hat{p}_i/(1-\hat{p}_i)$ 를 개입시키는 방법은 이와 다르다. p_i 를 예측할 때는 전체 관측치들을 이용하여 D 를 X 에 대하여 로짓이나 프로빗 등 회귀를 한다. 만약 그룹 간에 X 의 분포가 다르다면 D 를 X 값에 의하여 설명함으로써, 예컨대 " X 값이 크면 처치될 확률이 높고 X 값이 작으면 처치될 확률이 낮다"는 식의 정보를 제공한다. 하지만 그렇다고 하여 받침(support)이 상이할 경우에 외삽이 발생한다는 문제를 해결해 주지는

못한다.⁴¹⁾ 그보다는 이 $\hat{p}_i/(1-\hat{p}_i)$ 는 평균 비교 시 처치군의 X 분포가 적용되도록 해 주는 역할을 한다. 대조 관측치 중 $\hat{p}_i/(1-\hat{p}_i)$ 이 작은 관측치는 처치될 가능성이 낮은 것이므로 낮은 가중치를 주고 $\hat{p}_i/(1-\hat{p}_i)$ 이 큰 대조 관측치는 처치될 가능성이 높은 것이므로 높은 가중치를 주어, 이 가중치에 기반하여 대조군의 Y값을 평균하면 그 평균은 처치군의 X 분포에 맞추어 대조군의 Y를 평균한 셈이 된다. 그러므로 \hat{p}_i 가 처치될 확률을 올바르게 반영한다면 이 IPW 방법 또한 잘 작동할 것이다. Doubly robust (DR) 방법은 이 둘을 영리하게 결합시켜 둘 중 하나만 맞으면 ATT를 잘 추정하도록 해 주는 방법이다. 하지만 앞서 논의한 바와 같이 만약 X가 두 그룹 간에 분리되어 있으면 $\hat{p}_i/(1-\hat{p}_i)$ 이 아주 큰 값이 나올 수 있어서(깔끔한 이론과 달리) IPW 방법은 실질적으로 사용이 불안정한 경우가 많다. 어떤 방법이든 X 분포의 받침(support)이 그룹 간에 서로 다를 경우에 대해서는 해결책을 제공하지 않는다. 이 문제에 대한 해결은 모집단을 바꾸거나(겉치는 것만 사용) 아니면 외삽 등 가정에 기반하는 것이 외에는 없다. 그러니 이 문제를 더이상 의논하지 말고, 처치군의 X 분포에 맞추어 평균을 구하는 문제에만 집중해 보자. 여기에는 앞의 방법들 이외에도 직접적인 관측치 간 매칭(matching) 방법이 있다.⁴²⁾ Propensity score (PS) 매칭이라면 처치 관측치마다 PS가 가장 유사한 대조 관측치 또는 PS가 일정 범위 이상으로 유사한 대조 관측치들을 각각의 처치 관측치에 맺어주는 것이다. 만약 X가 스칼라라면 X를 비선형 변환한 값에 기반하여 맺어주는 것이고, X가 벡터라면 이들을 선형결합하여 지수화하고 비선형 변환한 것에 기반하여 맺어준다. 이 방법은 예측접근법과 비슷하면서도 다르다. 만약 $Y^0 = X\beta + u$ 모형이 옳고 X가 정확히 매칭된다면(즉, $X_i = X_j$), 예측접근법(결측치 대체법)은 가상 비처치 성과로서 $X_i\beta$ 를 사용하고 매칭 방법은 $X_i\beta + u_j$ 를 사용한다는 차이가 있다. 통상적인 예측접근법은 $Y^0 = X\beta + u$ 를 추정하기 위해 전체 비처치 관측치들을 사용하므로 만약 X와 Y^0 간 모형이 잘못되었으면 잘못된 결과를 준다. 매칭 방법은 X가 비슷한 소수의 관측치 또는 하나의 관측치만을 사용하는 것이라는 점에서 차이가 있다. 그래서 매칭만 제대로 된다면, $Y^0 = X\beta + u$ 모형이 맞든 틀리든 관계없이 IPW 방법에서와 같이 잘 작동한다.

4. Targeted Regression을 이용한 가중평균 DID의 구현

가. 개요

Staggered adoption 맥락에서, 요인모형을 제외하면 앞에서 논의한 더미변수 추정 방법들은 모두 그룹별·시기별 2x2 DID를 수행하고 이들 DID 추정량들을 적절한 가중치를 주고 평균하는 방법이라 할 수 있다. 요인모형의 경우에도 교정항을 만들어서 통제 변수를 추가하고 2x2 DID들을 하는 것으로 이해할 수 있다. 본 장에서는 주어진 데이터에서 가능한 모든 2x2 DID들을 특정방법으로 평균하는 추정량을 OLS 회귀로써 만들

40) ATU를 구하고자 한다면 대조 관측치들의 Y_i^0 를 예측하여 $\hat{Y}_i^0 - Y_i^0$ 를 대조 관측치들에 대하여 평균하면 될 것이다. 하지만 이 경우에는 잠재 처치 성과에 평행추세를 가정해야 할 것이므로 애매한 면이 있다. ATE를 추정하고자 한다면 처치 관측치에 대해서는 가상 '비처치' 성과를 예측하여 실제 성과와 이 가상 비처치 성과의 차이를 구하고, 대조(비처치) 관측치들에 대해서는 가상 '처치' 성과를 예측하여 이 가상 처치 성과와 실제 성과의 차이를 구한 다음, 이 추정된 처치효과들을 모든 관측치들에 대하여 평균하면 될 것이다.

41) 그래서 propensity score matching 문헌에서는 확률이 서로 겹치는지를 점검한다.

42) 매칭도 그룹 간에 분포의 받침(support)이 다른 문제는 해결해 주지 못한다.

어내는 방법을 살펴본다.

이 장에서 고려하는 데이터는 총 T 기 동안 관측이 이루어지는 데이터이며, 관측치들은 처치 개시 시기별로 T 개의 그룹으로 분할된다. 그룹별·시기별로 처치 그룹 더미는 다음과 같은 형태를 갖는다.

〈표 1-8〉 그룹별·시기별 처치상태 더미변수

D	g=1	g=2	g=3	...	g=T
t=1	0	0	0	...	0
t=2	1	0	0	...	0
t=3	1	1	0	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
t=T	1	1	1	...	0

자료: 저자 작성. Han and Koh(2024)에 일부 기재됨.

여기서 g 는 (최초 처치 시기가 아니라) 최종 미처치 시기를 의미함에 유의하라. 어떤 그룹이나 기간에는 관측치가 전혀 없을 수도 있다.

이런 데이터로부터 다수의 올바른 2×2 DID와 다수의 '뒤집힌 2×2 DID'가 도출된다.⁴³⁾ 모든 그룹과 시기에 관측치가 존재하는 경우 이들 가능한 DID의 개수를 모두 세어 보면 올바른 DID는 총 $(T-1)T(T+1)(T+2)/24$ 개이고 뒤집힌 DID는 총 $(T-2)(T-1)T(T+1)/24$ 개이다. 예를 들어 $T=10$ 이라면 올바른 DID는 495개, 뒤집힌 DID는 330개이다. 문헌에 제안된 집계 추정량들은 뒤집힌 DID들을 제외하고 올바른 DID들을 특정 기준에 따라 가중평균 한 것들이다. 예를 들어 csdid에서 never-treated를 대조군으로 삼는 방법 중 'simple' 옵션을 사용한 집계방법은 g 그룹과 T 그룹의 g 기(즉, 최종 미처치시기)와 t 기(g 그룹의 처치시기) 데이터를 이용한 2×2 DID들을 모든 $g < T$ 와 $t > g$ 에 대하여 구한 다음에 이들을 (g, t) 블록 관측치수에 비례하는 가중치로 가중평균 한다. 여기서 왜 하필 그러한 2×2 DID들을 그러한 가중치로 가중평균 하는지는 '경제학에 근거한 판단' 또는 달리 표현하면 '관례'에 해당하고, 이러한 관례가 계량경제학과 모순되지 않기 위한 조건들이 다양하게 언급된다. 다른 TWFE 추정량들도 모두 2×2 DID들의 특정 가중평균으로 표현할 수 있다. 설명을 위해, μ_{gt} 를 g 그룹 t 기 피설명변수 평균값이라 하고 δ_{hs}^{gt} 를 처치군= g , 대조군= h , 기준시점= s , 비교시

43) 앞서 언급하였듯이 올바른 DID는 '0 → 1'을 처치 관측치로 삼고 '0 → 0'을 대조 관측치로 삼는 DID이고, 뒤집힌 DID는 '0 → 1'을 처치 관측치로 삼고 '1 → 1'을 대조 관측치로 삼는 DID이다.

점=t에 해당하는 DID, 즉 $\delta_{hs}^{gt} = (\mu_{gt} - \mu_{gs}) - (\mu_{ht} - \mu_{hs})$ 라 하자. δ_{hs}^{gt} 의 상첨자 gt 는 (처치군, ‘나중’ 시기)에 해당하고 하첨자 hs 는 (대조군, ‘먼저’ 시기)에 해당한다. 앞의 <표 8> 구조에서 $g < h, s \leq g, g < t \leq h$ 이면 δ_{hs}^{gt} 는 올바른 DID이고, $g > h, s \leq h, h < g \leq t$ 이면 δ_{hs}^{gt} 는 뒤집힌 DID이다. 이 경우 TWFE를 포함한 모든 집계 추정량은 (X가 통제되고 나면)

$$\theta = \sum_{g=1}^T \sum_{t=1}^T \sum_{h=1}^T \sum_{s=1}^T w_{hs}^{gt} \delta_{hs}^{gt}, \quad w_{hs}^{gt} \geq 0$$

형태로 표현된다.⁴⁴⁾ 이 모수 θ 는 $\{w_{hs}^{gt}\}$ 커널로써 정의된다. 다음 절에서는 주어진 $\{w_{hs}^{gt}\}$ 에 대하여 집계 추정량 θ 를 각각의 δ_{hs}^{gt} 추정 없이 단번에 OLS로 추정하는 방법을 설명한다.

나. 방법

앞 절의 θ 추정량은 $\delta_{hs}^{gt} = (\mu_{gt} - \mu_{gs}) - (\mu_{ht} - \mu_{hs})$ 를 대입한 후 정리하여 $\theta = \sum_{g=1}^T \sum_{t=1}^T c_{gt} \mu_{gt}$ 형태로 표현할 수 있다. 여기서 $\{c_{gt}\}$ 를 계산해야 하는데, 이 계산은 T 가 작을 때에는 비교적 손쉽다. 예를 들어 $T=3$ 일 때 5개의 올바른 DID와 1개의 뒤집힌 DID가 있는데, 이들 6개 DID(올바른 것과 뒤집힌 것을 모두 포함)의 단순평균에 해당하는 9개 c_{gt} 계수들은 (손으로 일일이 계산해 보면) 다음과 같다.⁴⁵⁾

$$\begin{aligned} c_{11} &= -0.5, & c_{12} &= 0.5, & c_{13} &= 0, \\ c_{21} &= 0, & c_{22} &= -0.5, & c_{23} &= 0.5, \\ c_{31} &= 0.5, & c_{32} &= 0, & c_{33} &= -0.5 \end{aligned}$$

하지만 T 가 크면 이러한 수동 도출은 비현실적이다. 하지만 이 경우에도 $\{w_{hs}^{gt}\}$ 로부터 비교적 단순한 알고리즘을 이용하여 $\{c_{gt}\}$ 를 수치적으로 구할 수 있다.

44) ‘음의 가중치’ 문제는 뒤집힌 DID가 결부되어 발생하는 문제이다.

45) 특이하게도 이 6개의 모든 가능한 2x2 DID 간 산술평균은 δ_{31}^2 (즉, 그룹 1 vs 3, 시기 1 vs 2 DID)와 δ_{32}^3 (즉, 그룹 2 vs 3, 시기 2 vs 3 DID)의 산술평균과도 동일하다. 이는 도출되는 c_{gt} 값들을 구하여 일치함을 확인함으로써 증명할 수 있다. 후자의 두 DID는 모두 제대로 된 DID임에 유의하라. 이 경우 ‘금지된 비교’(뒤집힌 DID)가 결부된 평균 처치효과가 never-treated (그룹 3)을 대조군으로 한 2개의 처치직전시점 대비 처치시점의 올바른 DID 간 산술평균으로도 표현된다.

θ 가 2x2 DID들의 가중평균이기만 하면 반드시 모든 t 에서 $\sum_{g=1}^T c_{gt} = 0$ 이고 모든 g 에서 $\sum_{t=1}^T c_{gt} = 0$ 이 성립한다. 그리고 주어진 $\{c_{gt}\}$ 로부터 한 가지 $\{w_{hs}^{gt}\}$ 를 역산할 수도 있다.

그런데 이 역산방법은 유일하지 않으며, 동일한 추정량을 여러 2x2 DID들의 가중평균으로 표현하는 방법은 많다. Goodman-Bacon(2021)이나 Sun and Abraham(2021)의 분해방법은 그 중 가장 자연스러워 보이는 분해방법이지 유일한 분해방법인 것은 아니다. 부수적으로, 이 방법을 사용하면 균형패널의 경우 TWFE 추정량이 모든 가능한 (정방향 및 역방향) 2x2 DID들을 $n_g n_h$ 의 비율에 따라 가중평균 한 것임을 확인할 수 있다.

앞에서, 주어진 $\{w_{hs}^{gt}\}$ 로부터 $\{c_{gt}\}$ 를 알고리즘으로써 도출할 수 있다고 하였다. 이 $\{c_{gt}\}$ 를 이용하면 θ 를 구하기 위해 수많은 DID 회귀들을 구한 다음 평균을 구하는 것이 아니라 T^2 개 변수들을 생성한 후 단일한 회귀('targeted regression'이라 함)를 수행함으로써 단번에 구할 수 있다. 이러한 targeted regression의 주요 장점은 표준오차까지 표준적인 방식으로 구할 수 있다는 사실이다.

추정방법은 다음과 같다. 먼저 $c_{gt} \neq 0$ 인 (g,t) 를 하나 선택한다. 예를 들어 $c_{12} > 0$ 이면(c_{12} 가 0이 아니라는 것은 목표로 하는 집계 추정량이 1그룹 2기의 ATT를 포함하는 DID들의 가중평균임을 의미) (1, 2)를 선택한다. 다음으로, $a_{12} = 1/c_{12}$ 로 정의하고 나머지 모든 (g,t) 에 대하여 $a_{gt} = -c_{gt}/c_{12}$ 로 정의하자. 즉, c_{12} 를 1로 치환하고 다른 모든 c_{gt} 들의 부호를 바꾼 다음, 모든 원소들을 c_{12} 로 나누는 것이다. 이렇게 $\{a_{gt}\}$ 를 구하고 나면, 그 다음에는 모든 (g,t) 에 대하여 (g,t) 셀임을 나타내는 더미변수들을 T^2 개 생성하고, 이들 변수들의 관측치들 중 그룹 1과 기간 2 (그룹 1, 기간 2는 최초에 $c_{12} > 0$ 이었기 때문에 선택된 것이며 다른 셀이 선택되었다면 해당 셀을 지칭한다)에 해당하는 행들에 대하여 각 (g,t) 에 해당하는 칼럼별로 그 값들을 a_{gt} 로 치환한다. 그리고 나서 피설명변수를 이들 T^2 개 변수들에 대하여 절편 없이 회귀하면 (1,2)에 해당하는 변수의 계수가 바로 θ 의 추정량이 된다.⁴⁶⁾ 또한 많은 경우(항상은 아님) 이 목표 집계 통계량은 피설명변수를 처치 더미변수와 소수의 추가적 공변량들에 대하여 그룹더미들과 시간더미들을 포함시키고 회귀(또는 TWFE 회귀)함으로써도 구할 수 있다.

이상의 절차를 단순화시켜 설명하면, (i) 연구자는 $\{w_{hs}^{gt}\}$ 를 선택함으로써 θ 를 정의하

46) 이는 설명변수 행렬의 열변환과 관련되는 수학에 의하여 증명할 수 있으며, 여기서는 생략한다.

고, (ii) $\{w_{hs}^{gt}\}$ 로부터 $\{c_{gt}\}$ 와 $\{a_{gt}\}$ 를 알고리즘에 따라 도출하고, (iii) T^2 개 우변변수들을 생성하여 회귀함으로써 θ 추정량과 표준오차를 구한다. 연구자가 가중치들(w_{hs}^{gt})을 선택하면 그 이후 단계들은 모두 자동화된다.

다. 예제

$T=3$ 인 경우에 대하여 데이터를 생성하여 실제 작동하는 것을 확인해 보자. 그룹 1은 $t=2$ 에 처치되고 그룹 2는 $t=3$ 에 처치되며 그룹 3은 미처치 그룹이다. 표본크기는 그룹별로 각각 100, 300, 600으로서 기간별로 총 1,000명이며 균형패널이다. 처치로부터 j 기가 경과하고 나면 j 만큼의 처치효과가 발생한다. 즉, 처치 시작연도에 처치효과는 0, 그 다음 연도에 처치효과는 1이다. 그룹별·시기별로 처치 더미변수와 처치효과를 표로 나타내면 다음과 같다.

〈표 1-9〉 실험 데이터에서 처치 더미변수와 처치효과 설정값

D	g=1	g=2	g=3	TE	g=1	g=2	g=3
t=1	0	0	0	t=1			
t=2	1	0	0	t=2	0		
t=3	1	1	0	t=3	1	0	

자료: 저자 작성. Han and Koh (2024)에 일부 기재됨.

다음 몇 가지 추정량을 예로 고려한다. 1) 모든 가능한 6개 DID들(올바른 DID와 뒤집힌 DID 모두 포함)을 $n_g n_h$ 비율에 따라 가중평균 한 추정량, 2) 5개 올바른 DID들을 $n_g n_h$ 비율에 따라 가중평균 한 추정량, 3) 상대기간(r)이 0인, 즉 처치시점에 해당하는 DID들의 가중평균(가중치는 $n_g n_h$ 에 비례), 4) 처치직전시점을 기준으로 한 모든 ATT들의 가중평균.

1) 모든 6개 DID들의 가중평균

6개 DID들을 그림으로 표시하면 다음과 같다. 각각의 2x2 DID에 사용되는 관측치들이 음영 표시되어 있고 이에 해당하는 $n_g n_h$ 나누기 10,000이 하단에 표시되어 있다.

〈표 1-10〉 T=3에서 가능한 6개의 2x2 DID

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)																																																						
<table border="1" style="border-collapse: collapse;"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	1	0	0	1	1	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse;"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	1	0	0	1	1	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse;"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	1	0	0	1	1	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse;"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	1	0	0	1	1	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse;"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	1	0	0	1	1	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse;"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	0																																																									
1	0	0																																																									
1	1	0																																																									
0	0	0																																																									
1	0	0																																																									
1	1	0																																																									
0	0	0																																																									
1	0	0																																																									
1	1	0																																																									
0	0	0																																																									
1	0	0																																																									
1	1	0																																																									
0	0	0																																																									
1	0	0																																																									
1	1	0																																																									
0	0	0																																																									
1	0	0																																																									
1	1	0																																																									
3	6	6	18	18	3																																																						

자료: 저자 작성. Han and Koh (2024)에 일부 기재됨.

세로는 시간, 가로는 그룹을 의미한다. 0/1 숫자는 처치 더미변수 값이다. (a)-(e)는 올바른 DID이고 (f)는 뒤집힌 DID이다. 각 DID가 추정하는 모수는 (a), (b), (d), (e)는 0, (c)는 1, (f)는 $\tau_{23} - \tau_{13} + \tau_{12} = -1$ 이다. 이로부터 본 소절 추정량이 추정하는 모수를 구하면 그 값은 $[6*1 + 3*(-1)] / (3+6+6+18+18+3) = 1/18 = 0.055\dots$ 이다. 이 추정량이 TWFE와 동일하다는 것을 앞에서 보았다. 실제로 TWFE 추정값은 .0944914이고, 앞의 '나' 절에서 설명한 방법을 사용한 추정값도 이와 동일하다. 이 값은 모수 0.055...와 크게 다르지 않다. 표준오차는 소표본 교정으로 인하여 TWFE로 구할 때와 앞의 '나' 절 방법으로 구할 때 약간 차이가 나지만 이 차이는 무시하여도 좋다.

2) 5개 올바른 DID들의 가중평균

위 〈표 1-10〉에서 (f)를 제외한 (a)-(e)의 가중평균을 '나' 절 방법에 따라 구하면 추정값은 .1513752이다. 이 추정값은 (a)-(e)에 해당하는 ATT 참값들(c)만 1이고 나머지는 모두 0의 가중평균인 $6(1) / (3+6+6+18+18) = 6/51 = 2/17 \approx 0.1176$ 과 유사하다.

3) 처치시점 해당 올바른 DID들의 가중평균

처치시점(상대시간 $r = 0$)과 관련된 DID들은 〈표 1-10〉의 (a), (b), (d), (e)이다. 해당 ATT 참값들은 모두 0이므로 모수는 0이다. '나' 절 방법에 의하여 구한 추정값은 -.0084986 (표준오차는 .0868344)로서 0에 가깝다.

4) 처치직전시점을 기준시점으로 한 올바른 DID들의 가중평균

처치직전시점(즉, $s = g$)을 기준시점으로 한 올바른 DID들로는 〈표 1-10〉의 (a), (b), (c), (e)가 있다. 처치효과들의 참값은 (c)만 처치효과가 1이고 나머지는 0이므로 가중평균의 참값은 $6*1 / (3+6+6+18) = 6/33 = 2/11 \approx 0.182$ 이다. '나' 절 방법을 사용하여 추정한 값은 .1868052, 표준오차는 .091896이다.

라. 소결

본 절에서는 ATE 등 관심 있는 모수(타겟 모수)가 2x2 DID들의 가중평균으로서 주어질 때 알고리즘을 이용하여 해당 모수 추정에 필요한 최대 T^2 개의 설명변수들을 생성하고 종속변수(성과변수)를 이들 생성된 설명변수들에 대하여 OLS 회귀함으로써 타겟 모수를 추정하는 방법을 설명하였다.

이 절의 설명에서 모수는 회귀와 결부된 수학에 따라 간접적으로 정의되기보다는 연구자에 의하여 2x2 DID들의 특정 가중평균으로서 시작부터 정의된다. 그러므로 이 방법을 사용하고자 할 때 연구자가 잘못된 해석을 내릴 염려는 없다.

본 절에서는 이러한 ‘선해석 후구현’ 방법이 작동함을 보여준다. 추후 연구에서는 X 변수 처리, 다양한 모수들에 해당하는 c_{gt} 값들의 계산방법을 미리 제공하여 여러 모수들(예를 들어 처치직전시기가 아니라 최초처치시점 또는 정책도입시점 대비 ATE 등)의 추정을 손쉽게 구현하도록 함으로써 연구자들이 연산 부담 없이 다양한 추정 결과들의 유사점과 차이점에 대하여 평가하는 데 도움을 주고자 한다.

IV

결론

본 장 연구에서는 정책의 점진적 채택(staggered adoption)과 관련된 계량경제학적 문제들을 정리하고 관련 Stata 명령 및 패키지를 소개하였다. 정책이 동시에 적용되지 않고 순차적으로 적용될 때, 만약 자료가 충분하고 평균적인 정책효과에만 관심이 있다면 정책이 순차 적용되는 중간단계 자료를 무시하고 이전과 이후 비교로써 평균 처치효과를 추정할 수 있을 것이다. 단, 이는 처치직전시점 대비 정책효과의 추정은 허용하지 않는다.

정책이 동일 시점에 채택될 때 패널 양방향 고정효과(two-way fixed effects, TWFE) 회귀는 여러 2x2 DID들의 가중평균이고 그 가중치는 항상 비음(nonnegative)이다. 각각의 DID는 처치 상태가 0 → 0으로 유지되는 그룹 대비 0 → 1로 변하는 그룹을 비교하는 DID이므로, 가상 비처치 성과에 평행추세가 존재한다는 가정하에 TWFE는 항상 처치효과들의 가중평균이 된다. 순차 적용 시에도 TWFE는 여러 2x2 DID들의 가중평

균이 되는데, 주의할 점은 이 경우에는 처치상태가 0 → 0으로 유지되는 그룹 대비 0 → 1로 변하는 그룹을 비교하는 DID (올바른 DID)들뿐 아니라 처치상태가 1 → 1로 유지되는 그룹 대비 0 → 1로 변하는 그룹을 비교하는 DID (뒤집힌 DID)들까지 포함된다는 사실이다. 가상 비처치 성과의 평행추세 가정하에서, 올바른 DID들은 처치효과들의 가중평균(가중치는 비음)이 되지만, 같은 가상 비처치 성과의 평행추세 가정하에서 뒤집힌 DID들은 처치효과들의 선형결합이고 계수들의 합은 1이지만 양수와 음수가 섞여 있다. 이에 따라, TWFE는 처치효과들의 선형결합이지만 계수들에 양수와 음수가 섞여 있게 되고, 만약 처치효과들이 이질적이면 모든 처치효과는 양수이지만 TWFE는 음수로 수렴하는 문제가 발생할 수 있다. 그러므로 정책이 순차 채택되면서 생성된 자료를 그대로 사용할 때 정책효과들의 이질성이 의심되는 상황에서 정책효과들의 이질성을 반영하지 않은 모형에 TWFE를 기계적으로 적용하면, 그 결과로써 얻어지는 추정값은 정책효과들의 '평균'이 되지 않으며 부호까지 바뀔 수 있게 된다. 이 문제에 대해서 앞의 III에서 이에 대하여 상세히 설명하였다.

이 문제에 대한 해결책은 모든 이질적일 수 있는 그룹 및 기간에 대하여 정책효과가 이질적이 되도록 모형을 세우고 추정하는 것이며, 현재 문헌에 제시된 다양한 해결책들은 이를 구현한다. 다만 비교대상을 특정하는 방식, 공변량들의 효과를 반영하는 방법 등에서 논문 간에 약간씩 차이가 있다. 또한, 비교 관측치들을 이용하여 비처치 성과들과 공변량 간 관계를 추정하고 이를 이용하여 처치 관측치들의 가상 비처치 성과를 예측 또는 대체(imputation)하고 관측치의 실제 성과와 이 가상 비처치 성과 간의 차이를 특정 관측치 그룹에 대하여 평균함으로써 평균 처치효과를 추정하는 방법도 있다. 앞의 IV에서는 이들 다양한 방법을 설명하고 다양한 Stata 패키지들의 사용법을 설명하였다.

이상에서 살펴본 Staggered adoption 문제는 조세재정 관련 연구에서 중요한 시사점을 갖는다. 예를 들어 세계개편이 지역별 또는 국가별로 다른 시점에서 도입될 때 그 효과를 다각적이고 입체적으로 분석할 수 있게 해 준다. 이로써 정책의 인과적 효과를 보다 정밀하게 측정할 수 있다. 이러한 분석이 가능하므로, 정책을 일괄 도입하는 대신 단계 도입하는 전략을 설계하는 데 도움이 되고, 이는 리스크 관리 측면에서 이점이 된다. 또한 사전에 평가체계를 세우고 도입 후 효과와 부작용을 보다 체계적으로 분석할 수 있게 해 준다.

참고문헌

- 강창희·박상곤, 『대체로 해롭지 않은 이중차분법』, 경문사, 2025.
- 고혜진·정해식, “근로시간 단축과 삶의 만족: 주 40시간 근로제와 주 52시간 근로상한제 도입의 효과,” 『보건사회연구』, 43(2), 2023, pp. 7~28.
- 김명진·박남태, “스마트공장 도입 중소기업에 대한 정책자금 지원효과 실증 분석: PSM-Staggered DID 결합모형을 활용한 경영성과 비교 연구,” 『벤처창업연구』, 20(2), 2025, pp. 199~215.
- 김슬기·김의준, “투기과열지구의 단계적 지정 및 해제 효과,” 『국토계획』, 60(4), 2025, pp. 251~262.
- 박상곤, “과학관 건립이 지역의 인적 자본, 소득 및 고용에 미치는 효과,” Mimeo, 2025.
- 박상수·한치록 공역, 『계량경제학 I』, 박영사, 2020.
- 정근주, “중소기업에 대한 선제적 구조조정 지원정책의 효과성 분석: 기업활력제고를위한특별법을 중심으로,” 『산업경제연구』, 37(5), 2024, pp. 913~933.
- 한치록, 『계량경제학 강의』, 제5판, 박영사, 2024a.
- 한치록, 『패널데이터강의』, 제4판, 박영사, 2024b.
- 한치록·이윤석, 「패널데이터 분석 방법론과 활용」, 『조세·재정제도 분석 관련 방법론의 학습 및 활용』, 2023 재정전문가 네트워크 정책연구방법론분과, 조세재정연구원, 2023.
- Abbring, J. H., & Van den Berg, G. J., “The nonparametric identification of treatment effects in duration models,” *Econometrica*, 71(5), 2003, pp. 1491~1517.
- Athey, S., Bayati, M., Doudchenko, N., Imbens, G., & Khosravi, K., “Matrix completion methods for causal panel data models,” *Journal of the American Statistical Association*, 116(536), 2021, pp. 1716~1730.
- Autor, D., Cho, D., Crane, L. D., Goldar, M., Lutz, B., Montes, J., Peterman, W. B., Ratner, D., Villar, D., & Yildirmaz, A., “The \$800 billion paycheck protection program: Where did the money go and why did it go there?,” *Journal of Economic Perspectives*, 36(2), 2022, pp. 55~80.
- Bai, J., & Ng, S., “Matrix completion, counterfactuals, and factor analysis of missing data,” *Journal of the American Statistical Association*, 116(536), 2021, pp. 1746~1763.

- Biasi, B., & Sarsons, H., “Flexible wages, bargaining, and the gender gap,” *Quarterly Journal of Economics*, 137(1), 2022, pp. 215~266.
- Boone, C. E., Celhay, P., Gertler, P., Gracner, T., & Rodriguez, J., “How scheduling systems with automated appointment reminders improve health clinic efficiency,” *Journal of Health Economics*, 82, 2022, Article 102598.
- Borusyak, K., Jaravel, X., & Spiess, J., “Revisiting event-study designs: Robust and efficient estimation,” *Review of Economic Studies*, 91(6), 2024, pp. 3253~3285.
- Braghieri, L., Levy, R. E., & Makarin, A., “Social media and mental health,” *American Economic Review*, 112(11), 2022, pp. 3660~3693.
- Brynjolfsson, E., & Li, D., “Generative AI at work,” *Quarterly Journal of Economics*, 140(2), 2025, pp. 889~942.
- Callaway, B., & Karami, S., “Treatment effects in interactive fixed effects models with a small number of time periods,” *Journal of Econometrics*, 233(1), 2023, pp. 184~208.
- Callaway, B., & Sant’Anna, P. H. C., “Difference-in-differences with multiple time periods,” *Journal of Econometrics*, 225(2), 2021, pp. 200~230.
- Cameron, A. C., & Miller, D. L., “A practitioner’s guide to cluster-robust inference,” *Journal of Human Resources*, 50(2), 2015, pp. 317~372.
- Card, D., & Krueger, A. B., “Minimum wages and employment: A case study of the New Jersey and Pennsylvania fast food industries,” *American Economic Review*, 84(4), 1994, pp. 772~793.
- de Chaisemartin, C., & D’Haultfoeuille, X., “Two-way fixed effects estimators with heterogeneous treatment effects,” *American Economic Review*, 110(9), 2020, pp. 2964~2996.
- de Chaisemartin, C., & D’Haultfoeuille, X., “Difference-in-differences estimators of intertemporal treatment effects,” *Review of Economics and Statistics*, 2024, pp. 1~45.
- Cloud, C., Heß, S., & Kasinger, J., “Shared-e-scooter services and road safety: Evidence from six European countries,” *European Economic Review*, 160, 2023, Article 104593.
- East, C. N., Hines, A. L., Luck, P., Mansour, H., & Velásquez, A., “The labor market effects of immigration enforcement,” *Journal of Labor Economics*, 41(4),

- 2023, pp. 957~996.
- Fang, G., & Zhu, Y., "Long-term impacts of school nutrition: Evidence from China's school meal reform," *World Development*, 153, 2022, Article 105854.
- Goodman-Bacon, A., "Difference-in-differences with variation in treatment timing," *Journal of Econometrics*, 225(2), 2021, pp. 254~277.
- Han, C., & Koh, K., *Targeted Regressions for Estimating Average Treatment Effects with Multiple Time Periods*, Presentation Slides for Joint Conference, Korean Econometric Society, February 2, 2024.
- Horton, E., LaPoint, C., Lutz, B., Seegert, N., & Walczak, J., "Property tax policy and housing affordability," *National Tax Journal*, 77(4), 2024, pp. 861~901.
- Kim, Y., "The effects of universal free lunch provision on student achievement: Evidence from South Korea," *Journal of Economic Behavior & Organization*, 238, 2025, Article 107161.
- Kim, K., & Lee, M. J., "Difference in differences in reverse," *Empirical Economics*, 57(3), 2019, pp. 705~725.
- Kong, D., & Liu, C., "Centralization and regulatory enforcement: Evidence from personnel authority reform in China," *Journal of Public Economics*, 229, 2024, Article 105030.
- Lee, M. J., *Matching, Regression Discontinuity, Difference in Differences, and Beyond*, Oxford: Oxford University Press, 2016.
- Liu, S., Ma, S., Yin, L., & Zhu, J., "Land titling, human capital misallocation, and agricultural productivity in China," *Journal of Development Economics*, 165, 2023, Article 103165.
- McMichael, B. J., "Supply-side health policy: The impact of scope-of-practice laws on mortality," *Journal of Public Economics*, 222, 2023, Article 104901.
- Nguyen, P. V., Ngo, V. M., & Nguyen, H. H., "Are sanctions costly for the energy industry of sanctioning states? A difference-in-differences approach to sanctions during the Russia-Ukraine war," *World Economy*, 47(9), 2024, pp. 3836~3860.
- Ortega, A., "Medicaid expansion and mental health treatment: Evidence from the Affordable Care Act," *Health Economics*, 32(4), 2023, pp. 755~806.
- Park, M., "A selection correction method for heterogeneous treatment effects in staggered adoption settings," *Economics Letters*, 254, 2025, Article 112490.

- Rambachan, A., & Roth, J., "A more credible approach to parallel trends," *Review of Economic Studies*, 90(5), 2023, pp. 2555~2591.
- Roth, J., "Pretest with caution: Event-study estimates after testing for parallel trends," *AER: Insights*, 4(3), 2022, pp. 305~322.
- Roth, J., Sant'Anna, P. H. C., Bilinski, A., & Poe, J., "What's trending in difference-in-differences? A synthesis of the recent econometrics literature," *Journal of Econometrics*, 235(2), 2023, pp. 2218~2244.
- Sun, L., & Abraham, S., "Estimating dynamic treatment effects in event studies with heterogeneous treatment effects," *Journal of Econometrics*, 225(2), 2021, pp. 175~199.
- Wooldridge, J. M., *Introductory Econometrics: A Modern Approach*, 7th ed., Cengage, 2020.
- Wooldridge, J. M., "Two-way fixed effects, the two-way Mundlak regression, and difference-in-differences estimators," *SSRN Scholarly Paper*, No. 3906345, Social Science Research Network, Rochester, NY, 2021.
- Wooldridge, J. M., "Simple approaches to nonlinear difference-in-differences with panel data," *Econometrics Journal*, 26(3), 2023, pp. C31~C66.
- Zhang, P., "Anti-corruption campaign, political connections, and court bias: Evidence from Chinese corporate lawsuits," *Journal of Public Economics*, 222, 2023, Article 104861.

제2장

구조분석의 개념과 적용

윤 참 나 | 서울대학교 경제학부

본고는 구조적 추정의 기본 개념과 실증 적용을 체계적으로 연결하여 설명하는 것을 목표로 한다. 정책효과를 신뢰성 있게 예측하려면 단순히 내생성 통제와 인과식별을 넘어서야 하며, 정책변화하에서도 불변적인 모수에 기반한 행태적 메커니즘을 복원해야 한다. 구조적 추정은 선호, 기술, 제도적 제약과 같은 원초적 모수를 데이터로부터 추정하고, 그 모수를 바탕으로 반사실과 정책 시나리오를 시뮬레이션하는 포괄적 분석들을 제공한다. 축약형 추정이 특정 개입의 평균처리효과를 정밀하게 측정하는 데 강점을 갖는다면, 구조적 추정은 경제환경이 변할 때 결과가 어떻게 달라지는지를 일관되게 예측한다는 점에서 상호보완적인 역할을 담당한다.

본 원고는 동적이산선택(Dynamic Discrete Choice, DDC) 모형을 중심으로 삼아 구조적 추정의 핵심 방법론을 체계화한다. DDC 모형은 상태의존성과 전향적 기대를 명시적으로 모형화함으로써, 현재의 선택이 미래의 선택집합과 가치에 미치는 복합적 영향을 모형 내부에서 일관되게 처리할 수 있다. 이러한 동적 구조는 정태적 접근으로는 포착하기 어려운 여러 현상을 자연스럽게 다룬다. 내생적 지속성은 과거의 선택이 현재의 효용과 제약에 미치는 지속적 영향을 의미하며, 선택집합의 변화는 시간에 따라 달라지는 선택 옵션들의 동적 진화를 가리킨다. 이러한 복잡한 상호작용을 명시적으로 모형화하는 것이 DDC 접근법의 핵심적 장점이다.

방법론적 측면에서 Rust의 NFXP(Nested Fixed Point) 알고리즘과 Hotz-Miller의 CCP(Conditional Choice Probability) 접근법은 구조모형 추정을 위한 계산 전략의 양대 축을 형성한다. 전자는 벨만 방정식을 직접 반복 계산하여 가치함수(value function)를 도출하는 방식이지만, 후자는 데이터에서 관측된 선택확률을 먼저 추정하고 이를 통해 가치함수를 역산하는 방식이다. 본고는 이러한 방법론들을 모형의 식별 가정, 계산 안정성, 그리고 외적 타당성 검증과 유기적으로 연결하여 논의함으로써, 이론과 실무 간의 괴리를 최소화하고자 한다.

연구자는 미시경제학의 기본 최적화 이론, 확률과정의 기초 개념, 동적계획법의 원리, 그리고 계량경제학의 핵심 추정법에 대한 충분한 이해를 갖추었다고 가정한다. 계산 측면에서는 벡터와 행렬의 기본 연산, 수치적분과 보간법, 수치최적화의 기본 개념을 숙지하고 있으면 본 원고의 내용을 더욱 효과적으로 학습할 수 있다¹⁾. 실제 연구 환경에서

의 활용을 염두에 두어, 각 절은 복잡한 수식의 경제학적 의미를 직관적인 문장으로 풀어서 설명하고, 실제 구현 단계에서 연구자가 주의해야 할 중요한 사항들을 수치적 안정화와 식별 정규화의 관점에서 상세히 제시한다.

본 원고의 전체적인 구성은 개념적 기초에서 시작하여 실증적 응용까지 단계적으로 진행되는 논리적 흐름을 따른다. 먼저 구조적 추정과 축약형 추정의 개념적 대비를 통해 정책불변 모수의 의미와 중요성을 명확히 정립한다. 이어서 동적구조분석의 필요성과 모형화의 단계적 절차를 자세히 설명하고, DDC 모형의 핵심 구성요소인 상태공간, 전이확률, 효용함수, 오차항의 구조를 체계적으로 기술한다. 그다음 단계에서는 벨만 방정식을 활용한 해법을 유한기간 모형과 무한기간 모형으로 구분하여 정리하고, 조건부 선택 확률과 포함가치(inclusive value)의 계산 과정을 수학적 세부사항까지 포함하여 상세히 서술한다. 마지막으로 실제 추정을 위한 식별 가정들, 우도함수의 구성 원리, 최대우도법의 구현과 확장된 추정기법들을 다루며, 최종적으로 모형 검증과 반사실적 분석으로 연결하여 구조적 추정의 완전한 분석 사이클을 제시한다.

본 원고는 특정 데이터셋이나 개별 사례 연구에 종속되지 않도록 일반적이고 표준화된 표기법을 일관되게 유지하되, 실제 연구 과정에서 연구자들이 빈번하게 마주치는 식별과 계산상의 난점들을 중점적으로 강조한다. 조건부 독립성과 부가적 분리성의 정확한 의미와 그것이 모형에 미치는 함의, 모형의 식별을 위해 필수적인 위치 정규화와 규모 정규화의 구체적 방법, 패널 데이터에서 초기조건을 적절히 처리하는 방법의 중요성, 측정오차와 관찰되지 않는 이질성을 올바르게 취급하는 전략, 그리고 반복 알고리즘의 수렴 판정과 로그우도 함수의 단조 증가를 보장하는 수치적 기법 등의 실무적 원칙들을 원고 전반에 걸쳐 반복적으로 환기하고 강조한다. 최종적으로 본 원고를 완독한 독자는 DDC 모형을 독립적으로 명세하고, 적절한 해법을 선택하여 계산하며, 우도함수를 정확히 평가하고, 다양한 정책 시나리오를 체계적으로 시뮬레이션하는 일련의 과정을 스스로 설계하고 진단할 수 있는 실질적 역량을 갖추게 될 것이다.

1) 수치 모형의 기초적인 코딩(coding) 방법을 학습하고자 한다면, 다음 링크에서 파이썬(Python)을 활용한 코드 예제를 확인할 수 있다. 이 링크는 정량 경제학(computational economics)과 관련된 다양한 주피터 노트북(Jupyter Notebook) 예제와 코드를 모아 놓은 오픈 소스 갤러리 저장소이다 (<https://github.com/QuantEcon/notebook-gallery>, 검색일자: 2025. 12. 8.)

구조적 추정은 경제학 연구에서 단순한 상관관계나 통계적 연관성을 넘어서, 경제모형이 가정하는 근본적인 원초적 요소들인 개인의 선호, 생산기술, 제도적 제약조건 등의 모수를 데이터로부터 체계적으로 식별하고 추정하는 포괄적 분석 접근법을 의미한다. 이러한 접근법의 핵심적 특징은 추정된 모수들이 정책 변화나 제도적 충격에 대해 정책 불변성을 갖도록 설계된다는 점이며, 이는 Lucas 비판에서 제기된 문제를 근본적으로 해결하려는 시도이다. 구조적 추정의 궁극적 목표는 단순히 데이터상의 상관관계나 회귀계수를 추정하는 데 그치지 않는다. 오히려 경제주체의 최적화 행동과 시장균형 조건에서 도출된 구조적 모수를 실증적으로 회복하고, 이를 토대로 신뢰성 있는 반사실적 시뮬레이션과 정책 평가의 기반을 마련하는 데 그 목적이 있다.

구조적 모형이라는 용어 자체만으로는 다소 모호할 수 있지만, 실증분석에서 구조적 추정과 축약형 추정 간의 구분은 매우 명확하고 중요한 차이점을 갖는다. 경제학의 거의 모든 이론적 모형은 넓은 의미에서 구조적 성격을 띠고 있지만, 실제 실증연구를 수행하는 과정에서 구조적 추정은 모형의 행태적 원리와 미시경제학적 기초를 충실히 보존하면서 모수를 식별하고 추정하는 접근을 취하는 반면, 축약형 추정은 데이터에서 직접 관측 가능한 변수 간의 인과적 효과나 예측 관계를 중심으로, 상대적으로 간명하고 투명한 형태의 모형을 데이터에 적합 시키는 방식을 채택한다는 점에서 근본적인 차이를 보인다.

소비자의 효용극대화 문제로부터 축약형과 구조형의 개념을 확인해 보자.

$$\max_{x_i, y_i} U(x_i, y_i; \alpha, \beta)$$

$$p_x y_i + p_y y_i = m_i$$

여기서 $U(x_i, y_i; \alpha, \beta)$ 는 효용함수, p_x, p_y 는 가격, m_i 는 소득이다. 소비자의 최적수요는 가격, 소득 및 모수의 함수로 주어진다. 예를 들어, 효용함수가 불변대체탄력성 함수(CES)로 주어진다고 가정하면($U(x_i, y_i) = (\alpha x_i^\rho + (1-\alpha)y_i^\rho)^{1/\rho}$) 구조형 수요함수는 다음과 같이 주어진다.

$$x_i = \frac{m_i \alpha^\sigma p_x^{-\sigma}}{\alpha^\sigma p_x^{1-\sigma} + (1-\alpha)^\sigma p_y^{1-\sigma}}$$

여기서 α 는 재화 x 에 대한 가중치, $\sigma = \frac{1}{\rho}$ 는 대체탄력성을 나타낸다. 축약형은 위의 구조적 관계를 실증적으로 다음과 같이 간략화한 형태이다.

$$\log(x_i) = \gamma_0 + \gamma_1 \log(m_i) + \gamma_2 \log(p_x) + \gamma_3 \log(p_y) + \epsilon_i$$

$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 는 축약형식의 계수이며 ϵ_i 는 오차항이다. 축약형의 계수는 구조형 모수에 따라 달라질 수 있는 값이지만 그 관계를 명시적으로 적용하지 않으며, 오차항은 구조형에는 없지만 모형의 유연성을 높이기 위해 추가되었다. 이와 같이 축약형은 이론적 구조를 명시적으로 제약하기보다는, 변수 간의 관계를 데이터에서 바로 추정할 수 있는 형태로 표현한 식이다.

1. 축약형 추정과의 비교

구조적 추정과 축약형 추정은 동일한 자료를 분석 대상으로 삼더라도 연구자가 ‘무엇을 추정할 것인가?’, ‘왜 그것을 추정해야 하는가?’, ‘어떠한 방법으로 추정을 수행할 것인가?’라는 세 가지 핵심 질문에 대해 완전히 다른 목적과 분석 도구를 채택한다는 점에서 뚜렷한 차이를 보인다. 축약형 추정 접근법은 일반적으로 ‘특정 정책변수 X 가 결과변수 Y 에 미치는 직접적인 인과적 효과가 실제로 존재하는가, 그리고 그 효과의 정량적 크기는 얼마나 되는가?’라는 비교적 구체적이고 제한된 범위의 연구 질문에 답하도록 설계되어 있다. 이때 연구자의 주된 관심 대상은 특정 회귀계수나 평균처치효과와 같이 데이터로부터 비교적 투명하고 직접적으로 식별될 수 있는 소수의 핵심 통계량이다.

반면에 구조적 추정 접근법은 ‘왜 정책변수 X 가 결과변수 Y 에 영향을 미치는가?’라는 보다 근본적이고 포괄적인 메커니즘 자체를 이해하고 모형화하려는 목적을 갖는다. 이를 위해 개인의 선호함수, 생산기술, 제도적 제약조건과 같은 경제의 원초요소(economic primitives)들을 명시적인 모수로 설정하고, 이러한 구조적 모수들의 값을 데이터로부터 체계적으로 추정한다. 이렇게 추정된 구조적 모수들은 정책 변화나 제도적 충격에 대해 불변성을 갖도록 이론적으로 설계되어 있으며, 따라서 연구자는 특정 제도나 정책적 충격을 직접적으로 가정하여 다양한 반사실적 시뮬레이션을 체계적으로 수행할 수 있게 된다. 축약형 접근법에서도 제한적인 범위 내에서 반사실적 분석이 전혀 불가능한 것은 아니지만, 경제적 원초요소에 직접적인 충격을 가하는 방식의 정책 실험은 구조적 모형이 훨씬 더 설득력 있고 일관성 있게 구현할 수 있다는 장점이 있다.

두 접근법이 활용하는 실무적 분석 도구와 구현 방법론도 상당한 차이를 보인다. 축약형 추정에서는 주로 최소자승법(OLS), 도구변수법(IV), 이중차분법(DID), 회귀불연속 설계(RD) 등과 같은 전통적인 계량경제학적 기법들을 활용하여 인과효과를 추정하며, 실제 구현 과정은 대부분 Stata, R, SAS 등의 표준적인 통계 패키지를 사용하여 비교적 간단하게 수행할 수 있다. 반면에 구조적 추정에서는 먼저 이론적 모형을 수치적으로 해결하는 과정이 선행되어야 한다. 이는 가치함수 반복법(value function iteration), 동적계획법(dynamic programming), 편미분방정식이나 상미분방정식의 수치해석, 몬테카를로 시뮬레이션 등의 고도화된 수치해석 기법들을 통해 정책함수와 가치함수를 계산하는 단계를 포함한다. 이러한 수치적 해법을 통해 모형의 균형해를 구한 후에야, 최대우도법(ML), 시뮬레이션 최대우도법(SML), 일반화적률법(GMM), 시뮬레이션 적률법(SMM), 최소거리 추정법, 간접추론법 등의 다양한 추정 방법론을 활용하여 구조적 모수를 데이터에 적합시킬 수 있다. 이러한 복잡한 수치적 계산 과정으로 인해 구조적 추정의 실제 구현은 Matlab, Python, C++, Fortran 등과 같은 수치해석과 고성능 컴퓨팅에 특화된 프로그래밍 언어와 도구들이 주로 활용된다.

연구 결과에 대한 평가와 검증의 초점도 두 접근법 간에 근본적인 차이를 보인다. 축약형 추정에서는 주로 내적 타당성(internal validity)에 중점을 두며, 인과식별을 위한 가정들이 명시적이고 투명하게 제시되고, 데이터에서 모수로의 연결 과정이 비교적 직관적이고 이해하기 쉽다는 장점이 있다. 연구자와 독자는 식별 전략의 타당성을 상대적으로 쉽게 평가할 수 있으며, 추정 결과의 신뢰성을 판단하기 위한 기준들이 비교적 명확하다. 반면에 구조적 추정에서는 외적 타당성(external validity)을 더 중시하며, 구조적 모수에서 이론적 함의로, 그리고 다시 정책효과로의 연결 사슬을 명확하고 일관성 있게 제시하는 것을 핵심 목표로 한다. 이는 추정된 모형과 모수가 어떠한 경제적 환경이나 정책적 맥락으로 외삽(extrapolate)될 수 있는지, 그리고 그러한 일반화의 조건과 한계는 무엇인지를 모형 자체가 내재적으로 규정한다는 의미이다. 그러나 이러한 높은 수준의 일반화 가능성과 정책적 활용성을 확보하기 위한 대가로, 구조적 추정은 훨씬 더 많은 이론적 가정과 계산적 복잡성을 감수해야 한다는 트레이드오프가 존재한다.

결론적으로, 특정 정책 개입의 평균적 효과를 식별 가능성에 의존하여 명확하고 투명하게 보여주는 것이 연구의 주된 목적이라면 축약형 접근법이 더욱 적합한 선택이다. 반면에 정책이 작동하는 근본적 메커니즘을 규명하고, 제도적 환경, 가격 구조, 기술적 조건과 같은 경제적 원초요소들이 변화했을 때의 일반균형 반응과 장기적 파급효과를 예측하는 것이 연구의 핵심 목표라면 구조적 추정 접근법이 더욱 적합하다. 연구의 궁극적

목적이 정책효과의 존재 여부와 그 크기를 규명하는 데 있다면 축약형 방법론으로 간결하고 효율적으로 접근하는 것이 바람직하며, ‘왜 그러한 효과가 발생하는가?’, ‘다른 조건에서는 어떻게 달라질 것인가?’라는 질문이 연구의 핵심이라면 구조적 접근법을 통해 모형 설정, 식별 전략, 검증 과정을 치밀하고 체계적으로 설계하는 것이 올바른 연구 전략이라고 할 수 있다.

〈표 2-1〉 축약형과의 비교

	축약형 추정	구조적 추정
핵심 질문	정책의 효과가 존재하며, 그 크기는 얼마인가?	왜 그러한 효과가 발생하는가?
분석 목적	특정 정책변수와 결과변수 간의 인과적 효과 및 상관관계 식별	경제주체의 선호, 기술 등 원초적 모수 복원 및 반사실적 정책 시뮬레이션
모형의 성격	데이터에서 관측 가능한 변수 간 관계를 설명하는 상대적으로 간명하고 투명한 통계 모형	이론적 최적화 행동과 균형 조건을 명시적으로 반영한 확률적 데이터 생성 과정
정책 불변성	보장되지 않음: 추정된 계수가 정책 환경 변화에 따라 달라질 수 있어 일반화에 제약	확보됨: 정책 변화에도 변하지 않는 구조적 모수를 추정하여 새로운 환경 예측 가능(Lucas 비판 극복)
검증 초점	내적 타당성: 식별 전략의 투명성과 연구 설계의 견고성 중시	외적 타당성: 모형이 다른 환경이나 정책 변화를 얼마나 잘 예측하는지 중시
주요 도구	OLS, IV, DID, RD 등 전통적 계량경제 기법 (Stata, R 등 표준 패키지)	동적계획법, 벨만 방정식, 수치해석 및 최적화 기법 (Python, Matlab, Fortran 등)
장점	분석 과정이 투명하고, 식별 가정이 명확하며, 결과의 신뢰성 평가가 용이함	다양한 정책 시나리오 분석 및 장기적 파급효과/일반균형 효과 예측 가능
단점/비용	정책의 작동 원리(메커니즘) 설명이 어렵고, 경험하지 않은 정책 환경에 대한 예측력 부족	높은 계산 비용, 복잡한 수치해석, 식별을 위한 강한 이론적 가정 필요

자료: 저자 작성

2. Calibration과 구조적 추정의 대비

Calibration과 구조적 추정은 경제모형을 현실에 적용하는 방식에 있어서 근본적으로 다른 철학적 관점과 방법론적 접근을 채택한다. Calibration 접근법에서는 경제모형을 현실경제에 대한 합리적이고 유용한 근사치로 간주하는 실용주의적 관점을 취한다. 이는 모형이 현실의 모든 복잡성을 완벽하게 포착할 수는 없지만, 주요한 경제적 메커니즘과 정책적 함의를 이해하는 데 충분히 유용한 도구가 될 수 있다는 인식에 기반한다. 반면에 구조적 추정에서는 경제모형을 실제 데이터 생성과정 자체의 통계적 표현으로

보는 보다 엄밀한 접근을 취한다. 이는 모형이 단순한 근사치가 아니라 현실경제의 확률적 구조를 정확하게 반영하는 모형이어야 한다는 관점이다.

이러한 철학적 차이는 모형과 모수에 대한 해석과 의미 부여에서 명확하게 드러난다. Calibration에서 모형은 현실의 핵심적 특징들을 단순화하여 표현한 근사적 도구이며, 모수는 현실경제의 주요 특성과 정형화된 사실에 맞추어 연구자가 합리적으로 선택한 값들이다. 이때 모수 선택의 기준은 주로 다른 연구들에서 제시된 추정치, 거시경제 통계, 또는 특정 경제적 비율이나 탄력성 등의 실증적 증거에 기반한다. 반대로 구조적 추정에서 모형은 현실경제를 정확하게 표현하는 통계적이고 확률적인 데이터 생성 과정이며, 모수는 체계적인 통계적 방법론을 통해 데이터로부터 추정된 참값(true value)이다. 이는 모수가 단순히 합리적으로 선택된 값이 아니라, 통계적 추론을 통해 발견된 모집단의 진정한 특성을 반영하는 값이라는 의미이다.

평가 기준과 검증 방법에서도 두 접근법은 상당한 차이를 보인다. Calibration에서는 모형이 현실의 주요 특성들을 얼마나 잘 재현하는가를 평가의 핵심 기준으로 삼는다. 이는 주로 몇 가지 핵심적인 거시경제 지표나 정형화된 사실들을 모형이 얼마나 잘 맞추는지를 통해 평가된다. 반면에 구조적 추정에서는 통계적 일치성과 적합도를 정량적이고 체계적으로 점검하는 것을 중시한다. 이는 우도비검정(likelihood ratio test), 정보기준(AIC, BIC), 과잉식별 제약 검정 등의 형식적인 통계적 검정 방법을 통해 수행된다. 계산적 복잡성의 측면에서도 Calibration은 상대적으로 낮은 계산 부담을 갖지만, 구조적 추정은 모수 추정과 표준오차 계산을 위해 상당히 높은 계산적 복잡성을 요구한다. 불확실성의 표현과 관련해서도 Calibration은 민감도 분석이나 시나리오별 비교 등의 제한적인 방법을 사용하는 반면, 구조적 추정은 표준오차, 신뢰구간, 가설검정 등의 완전한 통계적 추론 체계를 통해 불확실성을 정량적으로 측정하고 보고할 수 있다.

결론적으로, 데이터에 기반한 엄밀한 통계적 일치성 확보와 불확실성의 정량적 측정 및 보고를 전제로 하여 정책 효과를 과학적으로 추론하고 평가하려는 연구 목적을 갖는다면 구조적 추정이 더욱 적합한 방법론이다. 반면에 계산적 부담을 상당히 줄이면서도 현실 경제의 몇 가지 핵심적인 특징이나 중요한 모멘트들을 효과적으로 맞추어 모형을 신속하게 현실에 근사시키고, 정책적 시사점을 빠르게 도출하려는 목적을 갖는다면 Calibration이 더욱 유용하고 실용적인 접근법이라고 할 수 있다.

〈표 2-2〉 Calibration과의 비교

	Calibration	구조적 추정
모형의 관점	현실경제에 대한 합리적이고 유용한 근사치	현실경제의 확률적 구조를 반영하는 데이터 생성 과정 그 자체
모수의 의미	기존 문헌이나 거시통계에 맞춰 연구자가 선택한 합리적 선택값	통계적 추론을 통해 데이터로부터 식별된 참값
평가 기준	핵심 특징 재현: 주요 거시지표나 정형화된 사실과의 일치 여부	통계적 일치성 및 적합도: 우도비검정, t-통계량 등 정량적 검정 중시
불확실성	민감도 분석 등을 통해 제한적으로 검토하며, 통계적 불확실성을 명시하지 않음	표준오차, 신뢰구간 등을 통해 불확실성을 통계적으로 정량화하여 보고
계산 복잡도	상대적으로 낮음: 모형의 해를 구하는 과정에 집중하므로 계산 부담이 적음	매우 높음: 모수 추정 및 표준오차 계산을 위해 반복적인 수치해석 필요
적합한 목적	핵심적인 경제 메커니즘을 빠르게 파악하고 정책적 시사점을 신속히 도출할 때	데이터와의 엄밀한 통계적 일치성을 확보하고 정책효과를 과학적으로 추론할 때

자료: 저자 작성

III

동태적 구조분석

동태적 구조 추정은 경제주체가 과거의 선택과 상태에 의존하며 미래를 내다보고 결정하는 과정을 명시적으로 모형화하고, 그 행동법칙을 규정하는 모수를 데이터로부터 추정하여 정책효과를 계량적으로 예측하는 접근이다. 정태적 비교로는 포착하기 어려운 상태의존성(state dependence)과 기대형성, 전환비용, 학습, 선택집합의 내생적 변화 등을 모형안에 넣어, 시간에 걸친 의사결정과 결과의 동학을 일관되게 설명하고 반사실 시뮬레이션을 가능하게 한다.

1. 동태적 분석의 필요성

경제학에서 동태적 분석의 필요성은 현실경제의 근본적 특성이 본질적으로 시간의 흐름과 불가분의 관계에 있다는 인식에서 출발한다. 경제주체들의 의사결정은 단순히 현재시점의 제약과 기회만을 고려하는 정태적 최적화 문제가 아니라, 과거의 경험과 미래에 대한 기대가 복합적으로 작용하는 동태적 과정이다. 이러한 동태적 특성을 무시하고

정태적 분석들만으로 경제현상을 이해하려 할 때, 우리는 정책의 진정한 효과와 메커니즘을 근본적으로 오해할 위험에 직면하게 된다. 동태적 분석의 필요성은 크게 세 가지 핵심적 측면에서 그 타당성과 중요성을 확인할 수 있다.

가. 상태의존성: 과거가 현재에 미치는 지속적 영향

동태적 분석이 필수적인 가장 근본적인 이유는 경제주체들이 직면하는 상태의존성 때문이다. 이는 현재시점에서 개인이나 기업이 누리는 효용의 크기, 직면하는 비용의 구조, 그리고 선택할 수 있는 대안들의 집합이 모두 과거의 선택 이력과 경험했던 상태들에 의해 결정적으로 영향받는다라는 의미이다. 예를 들어, 교육투자의 경우 과거의 교육 수준이 현재의 추가 교육으로부터 얻을 수 있는 수익률을 결정하며, 노동시장에서는 과거의 직업 경험이 현재 선택할 수 있는 일자리의 범위와 임금수준을 좌우한다. 기업의 연구개발 투자 역시 과거에 축적된 기술적 역량과 조직적 학습이 현재의 투자 효율성과 성공 확률에 직접적인 영향을 미친다.

더 나아가, 상태의존성은 단순히 과거 경험의 누적 효과를 넘어서 경로의존성(path dependence)이라는 더욱 복잡한 현상을 만들어낸다. 이는 동일한 최종 상태에 도달하더라도 그 과정에서 거처온 경로가 다르면 현재의 기회집합과 제약조건이 달라질 수 있음을 의미한다. 이러한 복잡한 동태적 상호작용을 정확히 이해하고 모형화하기 위해서는 시간의 흐름을 명시적으로 고려하는 동태적 분석들이 필요하다.

나. 전향적 기대: 미래에 대한 예측이 현재 행동에 미치는 영향

동태적 분석의 두 번째 핵심적 필요성은 경제주체들이 본질적으로 전향적(forward-looking) 특성을 갖는다는 사실에서 비롯된다. 합리적 경제주체들은 현재의 의사결정을 할 때 단순히 즉시적인 비용과 편익만을 고려하는 것이 아니라, 그 선택이 미래에 가져올 장기적 결과와 불확실한 전개 가능성을 종합적으로 고려한다. 이러한 전향적 행태는 현재의 선택을 단순한 현재가치 비교가 아닌 기대가치의 비교로 이해해야 함을 의미하며, 이는 동태적 분석을 없이는 적절히 포착할 수 없는 복잡한 최적화 과정이다.

구체적인 예로, 대학 진학을 결정하는 개인은 교육비용과 즉시적인 기회비용뿐만 아니라 미래의 소득 증가 가능성, 직업 안정성, 그리고 사회적 지위 향상 등의 장기적 편익을 종합적으로 고려한다. 기업의 투자 결정 역시 현재의 자본비용과 즉시적 수익률만이 아니라 미래 시장상황의 변화, 기술발전의 가능성, 경쟁환경의 전개, 그리고 정책 환

경의 변화 등에 대한 기대가 결정적 역할을 한다. 이러한 의사결정 과정에서 불확실성은 단순한 외생적 충격이 아니라 선택 과정에 내재된 핵심 요소가 된다.

전향적 기대의 중요성은 정책 변화에 대한 경제주체들의 반응에서 더욱 명확히 드러난다. 정책 발표나 제도 변경이 예고될 때, 경제주체들은 정책이 실제로 시행되기 이전부터 행동을 조정하기 시작한다. 예를 들어, 세율인상이 예고되면 기업들은 미리 투자를 앞당기거나 연기할 수 있으며, 개인들은 소비패턴을 조정할 수 있다. 이러한 예상 효과(anticipation effect)는 정태적 분석으로는 전혀 포착할 수 없는 현상이며, 정책의 실제 효과를 정확히 평가하기 위해서는 반드시 고려되어야 한다.

또한 정책의 지속성과 신뢰성에 대한 기대도 현재 행동에 중대한 영향을 미친다. 임시적이고 일회성인 정책과 영구적이고 지속적인 정책에 대한 경제주체들의 반응은 완전히 다를 수 있으며, 정부의 정책 의지와 신뢰성에 대한 평가가 정책효과의 크기와 방향을 결정하는 경우가 많다. 이러한 복잡한 기대 형성 과정과 그것이 현재 행동에 미치는 영향을 제대로 이해하기 위해서는 시간의 흐름과 불확실성을 명시적으로 고려하는 동태적 모형이 필수적이다.

다. 정책효과의 정확한 식별: 인과관계의 복잡성 해소

동태적 분석의 세 번째 중요한 필요성은 정책효과의 정확한 식별과 인과관계의 규명에 있다. 정태적 회귀분석이나 단순한 전후 비교만으로는 정책 개입이 경제주체들의 선택집합, 전환비용, 그리고 미래 기대 경로에 미치는 복합적 영향을 명확히 분리하고 식별하기가 극도로 어렵다. 정책의 진정한 효과는 종종 여러 경로를 통해 동시에 작용하며, 이러한 다중 경로의 상호작용과 시간에 걸친 누적 효과를 정확히 측정하기 위해서는 구조적 동태 모형이 필요하다.

동태적 구조모형을 사용하면 정책이 경제적 원초요소들, 즉 가격구조, 제도적 환경, 기술적 조건 등에 작용하는 구체적 경로를 명시적으로 모형화할 수 있다. 이를 통해 정책 변화가 이러한 원초요소들을 어떻게 변화시키고, 그 변화가 시간에 걸쳐 어떻게 누적되며, 최종적으로 관측가능한 결과변수에 어떤 영향을 미치는지를 체계적으로 추적할 수 있다. 예를 들어, 교육 보조금 정책의 경우 직접적인 교육비용 감소 효과뿐만 아니라 교육의 기회비용 변화, 미래 소득에 대한 기대 변화, 교육 시장의 공급 반응, 그리고 일반균형 효과까지 포괄적으로 분석할 수 있다.

더 나아가, 동태적 분석은 정책의 단기효과와 장기효과를 명확히 구분하고, 정책효과

가 시간에 따라 어떻게 변화하는지를 추적할 수 있게 해준다. 많은 정책의 경우 초기의 즉시적 반응과 장기적 조정 과정이 상당히 다를 수 있으며, 때로는 단기와 장기의 효과가 정반대 방향을 보이기도 한다. 예를 들어, 최저임금 인상의 경우 단기적으로는 고용 감소를 가져올 수 있지만, 장기적으로는 생산성 향상이나 노동자 이직률 감소 등을 통해 다른 결과를 낳을 수 있다. 이러한 복잡한 동태적 조정 과정을 정확히 이해하고 예측하기 위해서는 시간의 흐름을 명시적으로 고려하는 동태적 분석틀이 필요하다.

결론적으로, 동태적 분석의 필요성은 현실경제의 본질적 특성인 상태의존성, 전향적 기대, 그리고 정책효과의 복잡한 작용 경로에서 비롯된다. 이러한 특성들을 무시하고 정태적 분석만으로 경제현상을 이해하려 할 때, 우리는 정책의 진정한 효과를 오해하고 잘못된 정책적 함의를 도출할 위험에 직면하게 된다. 따라서 신뢰할 수 있고 정책적으로 유용한 경제분석을 위해서는 동태적 접근법이 필수적이며, 이는 단순한 방법론적 선택의 문제가 아니라 경제현실을 정확히 이해하기 위한 근본적 요구사항이라고 할 수 있다.

2. 동태적 구조분석의 단계

동태적 구조분석은 경제주체의 시간에 걸친 의사결정 과정과 그것이 생성하는 균형 결과를 체계적으로 이해하기 위한 포괄적인 분석 프레임워크이다. 이러한 분석은 정태적 접근법으로는 포착하기 어려운 상태의존성, 전향적 기대 형성, 그리고 현재 행동이 미래 기회에 미치는 복합적 영향을 명시적으로 모형화함으로써, 정책 변화의 장기적 파급효과와 동태적 조정 과정을 정밀하게 예측할 수 있게 해준다. 동태적 분석의 전체 과정은 크게 여섯 개의 상호 연결된 단계로 구성되며, 각 단계는 이론적 엄밀성과 실증적 신뢰성을 동시에 확보하기 위한 고유한 방법론적 과제와 기술적 요구사항을 갖는다.

가. 모형 명세: 경제적 환경의 구조화

모형 명세 단계는 동태적 분석의 이론적 기초를 구축하는 가장 중요하고 근본적인 과정으로, 분석하고자 하는 경제적 현상의 본질적 특성을 포착할 수 있는 수학적 구조를 체계적으로 설계하는 것을 목표로 한다. 의사결정 주체의 정의에서는 개인, 가계, 기업, 정부 등 분석의 핵심이 되는 경제주체를 명확히 식별하고, 이들의 목적함수와 제약조건, 그리고 상호작용 방식을 구체적으로 명세해야 한다. 시간구조의 설계에서는 분석 대상 현상의 특성에 따라 유한기간 모형과 무한기간 모형 중 적절한 형태를 선택해야 하며, 이는

문제의 복잡성과 계산 가능성 사이의 균형을 신중하게 고려하여 결정되어야 한다.

상태변수의 정의는 모형의 예측력과 계산 복잡성을 동시에 결정하는 핵심 요소로, 개별 경제주체 수준의 상태변수와 거시경제적 환경 상태변수를 적절히 구분하고, 각각에 대해 관측 가능한 부분과 관측되지 않는 부분을 명확히 식별해야 한다. 선택대안의 설정에서는 경제주체가 각 시점에서 직면하는 모든 가능한 행동 옵션을 포괄적으로 정의하되, 실제 데이터에서 관측되는 선택의 다양성과 제약조건을 현실적으로 반영해야 한다. 전이방정식(transition equation)의 명세는 현재의 상태와 선택이 미래의 상태분포에 미치는 영향을 수학적으로 표현하는 과정으로, 확률적 요소와 결정적 요소를 적절히 결합하여 현실의 불확실성과 예측가능성을 동시에 포착해야 한다.

정보구조의 설계는 경제주체가 의사결정 시점에서 어떤 정보를 보유하고 있으며, 어떤 방식으로 미래에 대한 기대를 형성하는지를 명확히 규정하는 과정이다. 이는 완전정보와 불완전정보, 대칭정보와 비대칭정보, 그리고 정적 기대와 적응적 기대 사이의 선택을 포함한다. 효용함수, 비용함수, 수익함수 등의 목적함수 설정에서는 경제학 이론에 부합하는 합리적 가정들을 유지하면서도 실증적으로 식별 가능한 함수형태를 선택해야 한다. 마지막으로 균형 개념의 명확화에서는 개별 최적화 문제의 해법과 시장균형 조건의 성립을 어떻게 연결할 것인지, 그리고 부분균형 분석과 일반균형 분석 중 어떤 접근법이 연구 목적에 더 적합한지를 신중하게 결정해야 한다.

나. 모형의 해법: 동적계획법을 통한 최적해 도출

모형의 해를 구하는 단계는 동태적 최적화 문제에 대해 주어진 모수 값 하에서 경제주체의 최적 의사결정 규칙과 그에 따른 가치함수를 수치적으로 계산하는 고도로 기술적인 과정이다. 이 과정의 핵심은 벨만 방정식(Bellman equation)으로 표현되는 동적 계획 문제를 효율적이고 정확하게 해결하는 것이며, 이를 위해 다양한 수치해석 기법들이 개발되고 활용되고 있다. 가치함수 반복법(value function iteration)은 가장 직관적이고 널리 사용되는 방법으로, 벨만 연산자의 축소사상(contraction mapping) 성질을 이용하여 초기 추정값으로부터 시작해 반복적으로 가치함수를 개선해 나가는 과정이다. 이 방법은 수렴성이 이론적으로 보장되지만, 상태공간이 클 때 계산시간이 기하급수적으로 증가할 수 있다는 한계가 있다.

정책함수 반복법(policy function iteration)은 가치함수와 정책함수를 교대로 개선하는 방식으로, 특정 조건하에서 가치함수 반복법보다 빠른 수렴속도를 보일 수 있다. 그

러나 각 반복단계에서 선형연립방정식을 구해야 하므로 계산 복잡성이 증가한다는 트레이드오프가 존재한다. 연속 상태공간을 다룰 때에는 체비셰프 다항식(Chebyshev polynomials), 스플라인(splines), 유한요소법(finite element method) 등의 함수근사 기법을 활용하여 무한차원 문제를 유한차원으로 변환해야 한다. 이러한 근사법들은 계산 가능성을 확보하지만, 근사 오차가 최종 결과에 미치는 영향을 신중하게 평가해야 한다.

시뮬레이션 기반 방법들은 전통적인 결정론적 접근법의 한계를 극복하기 위해 개발된 확률적 기법들로, 몬테카를로 방법, 중요도 샘플링(importance sampling), 그리고 준 몬테카를로 방법 등이 포함된다. 이러한 방법들은 고차원 적분 계산이나 복잡한 확률분포를 다룰 때 특히 유용하지만, 시뮬레이션 오차와 계산시간 사이의 균형을 적절히 맞추는 것이 중요하다. 근년에는 머신러닝 기법들, 특히 신경망과 강화학습을 활용한 해법들이 주목받고 있으며, 이들은 전통적 방법으로는 다루기 어려운 대규모 상태공간 문제에 새로운 가능성을 제시하고 있다.

다. 식별과 추정: 데이터로부터 구조적 모수 회복

식별과 추정 단계는 이론적 모형과 실증적 데이터를 연결하는 가교 역할을 하는 가장 핵심적이고 도전적인 과정이다. 식별 논증에서는 데이터의 어떤 특정한 측면이나 변동이 모형의 어떤 구조적 모수를 식별하는지를 논리적으로 명확하게 제시해야 한다. 이는 데이터에서 관측되는 선택확률의 수준, 상태 간 전이율의 패턴, 정책 변화에 대한 탄력성, 그리고 시간에 걸친 동태적 반응 경로 등 다양한 차원의 정보를 체계적으로 활용하는 과정이다. 각 모수의 식별은 다른 모수들과 독립적으로 이루어지는 것이 아니라, 모형의 전체적 구조 내에서 상호의존적으로 결정되므로, 식별 전략의 설계에서는 이러한 복합적 관계를 충분히 고려해야 한다.

추정 방법론의 선택은 모형의 구체적 특성, 데이터의 성격, 그리고 계산 가능성을 종합적으로 고려하여 이루어져야 한다. NFXP(Nested Fixed Point) 방법은 Rust에 의해 개발된 고전적 접근법으로, 각 모수 후보값에 대해 동적계획 문제를 완전히 해결한 후 우도함수를 평가하는 방식이다. 이 방법은 직관적이고 이론적으로 명확하지만, 계산 비용이 매우 높다는 단점이 있다. CCP(Conditional Choice Probability) 방법은 Hotz-Miller에 의해 제안된 대안적 접근법으로, 선택확률을 먼저 비모수적으로 추정한 후 이를 이용해 가치함수를 역산하는 방식이다. 이는 NFXP보다 계산적으로 효율적이지만, 연속 상태변수나 미관측 이질성이 있는 경우 적용에 제약이 있다.

관측 가능한 이질성의 처리에서는 개인별 특성이나 환경적 요인을 상태변수나 모수에 직접 반영하는 반면, 비관측 이질성의 처리에서는 무작위효과(random effects), 랜덤계수(random coefficients), 또는 유한혼합모형(finite mixture models) 등의 기법을 활용한다. 초기조건 문제는 패널 데이터의 첫 관측 시점 이전의 개인 이력을 어떻게 처리할 것인지에 관한 것으로, 이는 추정 결과의 편향성에 중대한 영향을 미칠 수 있다.

라. 추론과 진단: 통계적 신뢰성 확보

추론과 진단 단계는 추정된 모수들의 통계적 신뢰성을 평가하고, 모형의 수치적 안정성과 해의 타당성을 종합적으로 검증하는 과정이다. 표준오차와 신뢰구간의 계산은 추정된 모수들의 불확실성을 정량화하는 필수적 과정으로, 이는 정책 분석과 반사실적 시뮬레이션에서 결과의 신뢰성을 평가하는 기준이 된다.

과잉식별 검정(overidentification test)은 모형이 데이터의 다양한 측면을 일관성 있게 설명하는지를 평가하는 중요한 도구이다. 이는 추정에 사용된 모멘트 조건의 수가 추정해야 할 모수의 수보다 많을 때 가능하며, J-검정이나 Hansen 검정 등의 형태로 구현된다. 남겨둔 모멘트와 보조통계량을 이용한 대조 분석은 모형의 표본 외 예측력을 평가하는 효과적인 방법으로, 추정에 직접 사용되지 않은 데이터의 특성들을 모형이 얼마나 잘 재현하는지를 확인한다.

계산 안정성의 진단에서는 수치적 수렴성, 해의 유일성, 그리고 모수 변화에 대한 민감도를 체계적으로 점검해야 한다. 가치함수 반복의 수렴성은 축소사상(contraction mapping) 정리의 조건을 만족하는지, 수렴 속도가 적절한지, 그리고 수렴된 해가 진정한 고정점(fixed point)인지를 확인하는 과정이다. 해의 단일성 여부는 다른 초기값에서 시작한 반복이 동일한 해로 수렴하는지를 확인하여 평가할 수 있다. 모수 추정의 안정성은 시작값, 최적화 알고리즘, 수치적 허용오차 등의 변화에 대해 결과가 얼마나 견고한지를 테스트하여 평가한다.

마. 모형의 검증

모형의 검증은 구조적 모형이 실제 정책 변화나 경제적 충격에 대해 신뢰성 있고 정확한 예측을 제공할 수 있는지를 확인하기 위한 필수적이고 핵심적인 단계이다. 구조적 모형의 본질적 특성상 경제주체의 복잡한 의사결정 과정과 시장균형 메커니즘을 명시적으로 모형화하고, 데이터로부터 추정된 구조적 모수에 근거하여 다양한 반사실적 시뮬

레이션을 수행하게 된다. 따라서 모형 검증은 단순히 표본 내 적합도를 확인하는 수준을 넘어서서, 모형이 새로운 환경이나 정책 변화에 대해서도 일반화 가능성과 예측력을 유지할 수 있는지, 그리고 정책 변화에 대해 핵심적인 구조적 모수들의 불변성이 실제로 유지되는지를 체계적이고 엄밀하게 확인하도록 설계되어야 한다.

모형의 예측이 실제 관측 결과와 상당한 불일치를 보일 때에는 그 원인을 체계적으로 분석하고 개선 방안을 모색해야 한다. 이는 선호함수의 함수형태, 기술적 제약조건의 명세, 정보구조와 기대형성 메커니즘, 시장균형 조건과 제도적 환경 등 모형의 핵심 구성요소들을 재검토하는 과정을 포함한다. 또한 데이터 생성 과정에서의 측정오차, 표본 선택, 또는 관측되지 않은 요인들이 결과에 미치는 영향도 함께 고려해야 한다. 이러한 반복적 개선 과정을 통해 모형의 설명력과 예측력을 지속적으로 향상할 수 있으며, 최종적으로는 신뢰할 수 있고 정책적으로 유용한 분석 도구를 구축할 수 있게 된다.

바. 정책적 함의 도출

반사실적 시뮬레이션에서는 정책변수나 제도적 모수에 대한 가상적 변화를 모형에 입력하여 그 효과를 예측한다. 가격 정책의 변화, 보조금이나 세금의 도입 또는 변경, 규제 강화나 완화, 제도적 제약조건의 수정 등 다양한 정책 시나리오를 체계적으로 분석할 수 있다. 이 과정에서는 단기적 효과와 장기적 효과를 구분하고, 직접효과와 간접효과를 분리하며, 정책효과와 분포적 측면과 후생 변화를 종합적으로 평가해야 한다.

3. 동태적 구조분석의 예

Yoon(2017)은 지역 간 이동과 산업 간 직업 선택이 시간이 흐르며 상호작용하는 동태적 균형을 모형화한다. 개인은 숙련 축적과 이동비용을 고려해 장기적 지역·산업 선택을 최적화하며, 모형은 이러한 결정 규칙을 규정하는 모수를 데이터로부터 추정해 러스트벨트 쇠퇴의 후생적 함의를 평가한다.

Sieg and Yoon(2017)은 주지사 선거의 동적 게임을 통해 정치인의 이념적 위치 선택을 분석한다. 재선 가능성과 임기 제한을 내생적으로 고려하는 정치인의 전향적 선택을 모형화하고, 유권자의 능력·이념 평가가 축적되는 환경에서 정책 중도화의 균형 경로를 설명하도록 모수를 식별한다.

Oh and Yoon(2020)은 주택의 건설 기간(time to build)과 불확실성 하 실물옵션을

결합한 동태적 의사결정을 다룬다. 사업자는 시장 불확실성과 단계별 전환비용을 고려해 착공·중단을 선택하며, 모형은 이러한 옵션가치와 조정비용 관련 모수를 추정해 건설 지연의 동학을 설명한다.

Sieg and Yoon(2020)은 뉴욕시 공공주택 대기와 임대료 규제주택 탐색이 결합한 가구의 동태적 주거 선택을 모형화한다. 가구는 대기열과 이전 타이밍을 함께 최적화하며, 모형은 전환비용·주거유형 간 효용 차이 등의 모수를 통해 주거 이동의 경로와 정책 변화의 효과를 예측한다.

Sieg and Yoon(2022)는 도시 정치에서 시장의 노력 수준과 유권자의 재선 선택이 상호작용하는 동학을 분석한다. 시장은 임기 제한과 재선 인센티브를 내다보며 정책적 노력을 조정하고, 모형은 책임성(accountability) 메커니즘을 결정하는 모수를 추정해 정책·선거 간의 동태적 통제 관계를 식별한다.

Sieg, Yoon, Zhang(2023)은 중국의 이주·교육 정책이 인적자본 축적과 불평등에 미치는 동태를 다룬다. 가구는 후코우(hukou) 제도와 지역별 교육서비스 질을 고려해 이주와 자녀 교육투자를 함께 최적화하고, 모형은 인적자본 생산과 이동 관련 모수를 사용해 장기적 분포 효과를 평가한다.

Fu, Ko, and Yoon(2025)은 가족 내 보육과 장기요양 제공이 이타적·전략적 동기 아래 동태적으로 엮히는 과정을 모형화한다. 세대간 암묵적 계약을 통해 시간이 흐르며 상호작용하는 보육·요양 결정을 설명하고, 모형은 선호와 상호의존 구조의 모수를 통해 정책 변화의 분배적 효과를 탐구한다.

Sieg and Yoon(2025)은 주정부의 재정정책을 둘러싼 동적 게임을 구성해 정당 간 이념 갈등과 균형예산 제약하 지출 결정을 분석한다. 모형은 정치적 양극화와 조정비용이 축적되는 환경에서의 전략적 예산 책정을 설명하고, 관련 모수를 바탕으로 정치적 경기순환의 반사실을 시뮬레이션한다.

이 장의 논의는 동적 이산선택모형 추정 방법론의 근간이 되는 Rust(1987), Hotz and Miller(1993), 그리고 Keane and Wolpin(1997)의 연구성과를 기초로 하여 구성되었다. 이들은 각각 고정점 알고리즘, CCP 추정법, 그리고 시뮬레이션 적률법 등을 통해 동태적 의사결정 모형의 해를 구하고 모수를 추정하는 데 있어 핵심적인 기여를 한 연구들이다. 본 연구는 이러한 방법론적 흐름을 계승하고 있으며, 관련 문헌에 대한 보다 심도 있는 검토와 기술적인 세부 사항은 해당 분야의 방법론을 체계적으로 정리한 Aguirregabiria and Mira(2010)의 서베이 논문을 바탕으로 보완하였다.

1. 모형의 구성

가. 상태변수와 제어변수

동적 이산선택모형에서는 두 가지 유형의 변수가 존재한다. 첫 번째는 상태변수(state variables) s_t 이고, 두 번째는 제어변수(control variables) d_t 이다.

가능한 모든 선택들의 집합은 D 이며, 선택가능한 행동공간(action space)은 유한한 수의 원소를 가진다. 선택은 제약을 받으며, 이러한 제약은 경제의 상태에 따라 달라진다. 특정 상태 s_t 에서 가능한 선택들의 집합을 $D_t(s_t) \subseteq D$ 로 표현할 수 있다. 선택을 제약하는 예시로는 예산 제약, 자본의 상태 변화 법칙 등이 있다.

나. Rust의 최적 버스 엔진 교체 모형

Rust (1987)는 최적 엔진 교체 모형을 추정했다. 이 모형에서 선택할 수 있는 행동은 엔진을 교체하거나 교체하지 않는 것이다:

$$d_{1,t} = \begin{cases} 1: \text{교체하지 않음} \\ 0: \text{교체함} \end{cases}$$

행동변수는 다음과 같이 표현된다:

$$d_t = (d_{1t}, d_{2t}), d_{2t} = 1 - d_{1t}$$

상태변수는 $s_t = (x_t, \epsilon_t)$ 로 구성되며, 여기서 x_t 는 엔진의 운행 마일수이고, $\epsilon_t = (\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t})$ 는 개별적 충격(idiosyncratic shocks)이다.

다. 선호와 기대

한 기간에서의 효용(period utility) 함수는 $u(s_t, d_t, \theta)$ 로 표현된다. 여기서 θ 는 추정할 모수(parameter)의 벡터이며, 편의상 자주 생략한다.

경제 주체는 할인율(discount factor) β 를 사용하여 미래효용의 현재가치를 극대화한다:

$$\max E[\sum_{\tau=t}^T \beta^{\tau-t} u(s_\tau, d_\tau, \theta)]$$

미래 상태에 대한 기대(beliefs)는 마르코프 전이확률(Markov transition probabilities)을 따른다:

$$\pi(s_{t+1} | s_t, d_t, \theta)$$

라. 버스 교체 예시의 효용 구조

각 선택 행동에 따른 효용은 다음과 같이 정의된다:

$$\begin{aligned} u_{1,t} &= -C(x_t, \theta) + \epsilon_{1,t} \\ u_{2,t} &= -C(0, \theta) - r_c + \epsilon_{2,t} \end{aligned}$$

여기서:

- 운행비용(operating costs) 함수: $C(x_t, \theta) = \theta_0 + \theta_1 x_t$
- 교체비용(replacement costs): r_c

상태변화확률은 다음과 같다:

$$P[x_{t+1} | x_t, d_t, \theta] = \begin{cases} \theta_2 e^{-\theta_2(x_{t+1} - x_t)} & d_{1,t} = 1 \\ \theta_2 e^{-\theta_2 x_{t+1}} & d_{2,t} = 1 \end{cases}$$

오차항(error terms) $(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})$ 은 제1종 극단치 분포(Type I extreme value)를 따른다.

마. 최적 결정 규칙

개인은 최적의 결정 규칙(optimal decision rule) $\delta_t(s_t, \theta)$ 을 선택한다:

$$d_t = \delta_t(s_t, \theta)$$

이는 기대생애효용(expected lifetime utility)을 극대화하기 위함이다:

$$V_t(s) = \max_{\delta} E[\sum_{\tau=t}^T \beta^{\tau-t} u(s_{\tau}, d_{\tau}, \theta) \mid s_t = s]$$

여기서 $V_t(s)$ 는 동적 이산선택 문제의 가치함수(value function)이다.

바. 벨만 방정식

개인의 최적화 문제는 다음과 같은 벨만 방정식으로 재귀적(recursive) 표현이 가능하다:

$$V_t(s) = \max_{d \in D_t(s)} [u(s, d) + \beta \int V_{t+1}(s') \pi(s' \mid s, d, \theta) ds']$$

상태공간(state space)을 이산화(discretize)하면, 가능한 상태의 수를 S 라 할 때:

$$V_t(s) = \max_{d \in D_t(s)} [u(s, d) + \beta \sum_{s'=1}^S V_{t+1}(s') \pi(s' \mid s, d, \theta)]$$

2. 모형의 해법

가. 유한기간 동적계획 문제 해결법

유한기간 모형은 가치함수와 정책함수가 시간에 따라 달라지는 비정상성(non-stationary)을 특징으로 한다. 이러한 모형의 해는 명확한 종료 시점이 존재하므로, 마지막 기간부터 시작하여 초기시점까지 순차적으로 거슬러 올라가는 역방향 귀납법(backward induction)을 통해 도출할 수 있으며, 계산 과정이 유한한 단계 내에서 확정적으로 종료된다.

최종기간의 가치함수는 미래가 없으므로 단순히 현재기간의 효용으로 정의된다.

$$V_T(s) = \max_{d \in D_T(s)} u(s, d)$$

중간 기간의 가치함수는 현재 효용과 미래 기대가치의 할인된 합으로 구성된다.

$$V_t(s) = \max_{d \in D_t(s)} [u(s, d) + \beta \sum_{s'} V_{t+1}(s') \pi(s'|s, d)]$$

여기서:

- $V_t(s)$: t기의 상태 s에서의 가치함수
- $u(s, d)$: 현재기간 효용
- β : 할인율
- $\pi(s'|s, d)$: 상태 전이확률

나. 정상 무한기간 모형

정상 무한기간(stationary infinite horizon)에서는 모든 t에 대해 가치함수가 동일하다.

$$V_t(s) = V(s) \quad \forall t$$

따라서, 가치함수는 다음 벨만 방정식을 만족한다:

$$V(s) = \max_{d \in D_t(s)} [u(s, d) + \beta \int V(s') \pi(s'|s, d, \theta) ds']$$

정상 무한기간 모형의 해법으로는 가치함수 반복법과 정책함수 반복법이 있다.

1) 가치함수 반복법

가치함수 $V(s)$ 는 축소 사상(contraction mapping)의 고정점(fixed point)이므로 다음 과정을 반복하여 값을 구한다.

$$V'(s) = \max_{d \in D(s)} [u(s, d) + \beta \sum_{s'} V(s') \pi(s'|s, d)]$$

위의 과정은 다음 조건이 충족될 때까지 반복한다.

$$| | V(s) - V'(s) | | \leq c, \text{ 모든 상태 } s \text{ 에 대하여}$$

여기서 c 는 미리 정한 작은 양수이다.

2) 정책함수 반복법

가치함수를 직접 반복하는 대신, 정책함수를 반복할 수도 있다. 우선, 초기 정책함수 $\delta(s)$ 를 선택한다. 다음은, 선택된 정책에 대응하는 가치함수를 아래와 같이 계산한다.

$$V_\delta(s) = u(s, \delta(s)) + \beta \sum_{s'} V_\delta(s') \pi(s' | s, \delta(s))$$

위식의 양변에 있는 $V_\delta(s)$ 를 좌변으로 정리하고 역행렬을 이용하면 아래와 같은 해를 구할 수 있다.

$$V_\delta = (I - \beta E_\delta)^{-1} u$$

여기서:

- I : 단위행렬
- E_δ : 정책 δ 에 대응하는 전이행렬
- u : 효용벡터

$V_\delta(s)$ 를 이용하여 최적화 문제의 해를 구하면 정책함수를 아래와 같이 갱신할 수 있다.

$$\delta'(s) = \arg \max_{d \in D(s)} [u(s, d) + \beta \sum_{s'} V_\delta(s') \pi(s' | s, d)]$$

일반적으로 갱신된 정책함수는 초기 설정한 정책함수와 다르므로 정책함수가 수렴할 때까지 위의 단계를 반복한다.

3) 두 방법의 비교

〈표 2-3〉 두 방법의 비교

특성	가치함수 반복법	정책함수 반복법
수렴속도	상대적으로 느림	빠름
계산복잡도	각 반복에서 낮음	각 반복에서 높음
메모리 사용	적음	많음
안정성	높음	중간

자료: 저자 작성

4) 실제 적용 시 고려사항

동적계획 문제에서 상태공간의 크기는 계산 복잡도에 직접적인 영향을 미친다. 상태공

간이 커질수록 계산 부담이 기하급수적으로 증가하는 차원의 저주(curse of dimensionality) 문제가 발생한다. 이를 해결하기 위해서는 연속적인 상태변수를 적절한 격자점(grid points)으로 이산화하는 과정이 필요하며, 이때 정확도와 계산 효율성 간의 균형을 고려해야 한다.

반복 알고리즘의 종료 조건을 설정할 때는 신중한 판단이 요구된다. 수렴기준을 너무 엄격하게 설정하면 불필요하게 많은 반복이 필요하여 계산시간이 과도하게 소요된다. 반대로 수렴기준을 너무 느슨하게 설정하면 충분히 정확한 해에 도달하지 못하여 최종 결과의 신뢰성이 떨어질 수 있다. 따라서 문제의 성격과 요구되는 정확도 수준을 고려하여 적절한 허용오차를 설정해야 한다.

반복 알고리즘의 수렴속도는 초기값 선택에 크게 좌우된다. 무작위로 초기값을 설정하는 대신, 문제의 경제적 맥락과 이론적 배경을 바탕으로 합리적인 초기 추정치를 제공하면 수렴속도를 현저히 개선할 수 있다. 예를 들어, 유사한 문제의 해나 단순화된 모형의 해석해를 초기값으로 활용하는 것이 효과적이다.

다. 요약

동적계획 문제의 해결법은 문제의 시간적 특성에 따라 적절한 방법을 선택해야 한다. 유한기간 문제의 경우 마지막 기간부터 거슬러 올라가는 역방향 가치함수 반복법을 사용하는 것이 효과적이다. 반면 무한기간 문제에서는 가치함수 반복법과 정책함수 반복법 중에서 문제의 복잡도와 계산 자원을 고려하여 선택할 수 있다.

실제 구현 과정에서는 계산 효율성과 정확도 간의 균형점을 찾는 것이 중요하다. 특히 상태공간의 크기가 클 때는 적절한 이산화 전략이 필요하며, 수렴 기준은 계산시간과 정확도를 모두 고려하여 설정해야 한다. 또한 경제적 직관을 바탕으로 한 합리적인 초기값 선택은 알고리즘의 수렴속도를 크게 개선할 수 있다.

3. 모형의 추정

가. 관찰된 상태변수와 관찰되지 않은 상태변수

모형의 모수를 추정하기 위해서는 추가적인 가정이 필요하다. 이를 위해 상태공간을 두 부분으로 나누어 생각할 수 있다.

첫 번째는 x 로 표현되는 계량경제학자에게 관찰되는 상태변수(observed states)이

고, 두 번째는 ϵ 로 표현되는 계량경제학자에게 관찰되지 않는 상태변수(unobserved states)이다. 개인은 전체 상태변수 $s = (x, \epsilon)$ 를 모두 관찰한다고 가정하며, 이에 따라 최적 결정 규칙을 다음과 같이 다시 표현할 수 있다:

$$\delta(s, \theta) = \delta(x, \epsilon, \theta)$$

관찰되지 않는 상태변수를 적분(integrate out)하여 조건부 선택확률(conditional choice probabilities)을 구할 수 있다.

나. 결정론적 결정 규칙

동적계획법 모형에서 최적 결정 규칙은 결정론적(deterministic)이다. 관찰되지 않는 상태변수의 존재는 잘 정의된(well-behaved) 계량경제학 모형을 얻기 위한 필수 조건이다.

결정 규칙을 다시 쓰면 $\delta(s, \theta) = \delta(x, \epsilon, \theta)$ 가 되고, 관찰되지 않는 상태변수를 적분하여 조건부 선택확률을 얻는다:

$$P[d|x, \theta] = \int 1[d = \delta(x, \epsilon, \theta)]q(\epsilon|x)d\epsilon$$

이는 정적 이산선택모형(static discrete choice models)의 McFadden (1974)의 아이디어와 동일하다.

다. 조건부 독립성 가정

전이확률을 추정하기 위해서는 특별한 가정이 필요하다. 일반적으로 다음과 같은 조건부 독립성 가정을 사용한다:

$$\pi(x_{t+1}, \epsilon_{t+1} | x_t, \epsilon_t, d_t, \theta) = q(\epsilon_{t+1} | x_{t+1}, x_t, \epsilon_t, d_t, \theta) f(x_{t+1} | x_t, \epsilon_t, d_t, \theta) = q(\epsilon_{t+1} | x_{t+1}) f(x_{t+1} | x_t, d_t, \theta)$$

이는 x_{t+1} 이 ϵ_{t+1} 에 대한 충분통계량(sufficient statistic)임을 의미한다. 실제로는 종종 $q(\epsilon_{t+1}|x_{t+1}) = q(\epsilon_{t+1})$ 라는 단순 가정을 추가적으로 적용한다. 또한 $f(x_{t+1} | x_t, d_t, \theta)$ 가 ϵ_t 에 의존하지 않는다고 가정하므로, ϵ_t 는 순수한 잡음(white noise) 과정이다.

라. 부가적 분리성 가정

효용함수가 오차항 ϵ_t 에 대해 부가적으로 분리가능(additively separable)하다고 가정한다:

$$u(s_t, d_t, \theta) = u(x_t, d_t, \theta) + \epsilon_t(d_t)$$

이를 명시적으로 표현하면:

$$u(s_t, d_t, \theta) = \sum_i d_{i,t} [u_i(x_t, \theta) + \epsilon_{i,t}]$$

이 가정의 주요 장점은 오차항을 쉽게 적분할 수 있게 해준다는 점이다.

마. 조건부 가치함수

앞선 가정 하에서 벨만 방정식은 다음과 같이 표현된다:

$$\begin{aligned} V(x, \epsilon) &= \max_{d \in D(x)} u(x, d) + \epsilon(d) + \beta \int \int V(x', \epsilon') q(\epsilon' | x') d\epsilon' f(x' | x, d) dx' \\ &= \max_{d \in D(x)} v(x, d) + \epsilon(d) \end{aligned}$$

조건부 가치함수(conditional value functions) $v(x, d)$ 는 다음과 같다:

$$v(x, d) = u(x, d) + \beta \int [\int V(x', \epsilon') q(\epsilon' | x') d\epsilon'] f(x' | x, d) dx'$$

바. 조건부 선택확률

관찰되지 않은 상태변수를 적분함으로써 다음과 같은 조건부 선택확률을 얻는다:

$$P[d | x, \theta] = \int 1[d = \delta(x, \epsilon, \theta)] q(\epsilon | x) d\epsilon$$

이를 최적 선택 규칙을 이용하여 다시 표현하면:

$$P[d | x, \theta] = \int 1[d = \arg \max v(x, d) + \epsilon(d)] q(\epsilon | x) d\epsilon$$

조건부 선택확률이 잘 정의되려면 오차항 ϵ 이 무한 지지집합(unbounded support)을 가지는 연속형 변수여야 한다.

사. 우도함수

확률표본 $[x_t^i, d_t^i]_{i=1, t=1}^{N, T}$ 이 있을 때, 우도함수(likelihood function)는 다음과 같이 표현된다:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T P_t(d_t^i | x_t^i, \theta) f(x_{t+1}^i | x_t^i, d_t^i, \theta)$$

우도함수는 조건부 선택확률과 전이확률의 두 가지 요소로 구성된다.

자. 관찰되지 않는 유형들

관찰되지 않는 이질성(unobserved heterogeneity)을 통제하는 것이 유용하다. Heckman과 Singer (1984)를 따라, $m = 1, \dots, M$ 개의 서로 다른 유형(type)을 정의하고, 각 유형의 선호와 기대가 다르다고 가정한다.

각 유형이 확률 q_m 으로 존재한다고 하면, 우도함수는 다음과 같다:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N [\sum_{m=1}^M q_m \prod_{t=1}^T P_t^m(d_t^i | x_t^i, \theta) f_t^m(x_{t+1}^i | x_t^i, d_t^i, \theta)]$$

4. 알고리즘

가장 기본적인 접근법은 Nested Fixed Point(NFXP) 알고리즘으로, 이는 다음 두 가지 반복 과정으로 구성된다. 외부 반복(outer loop)에서는 모수 공간을 탐색하고, 내부 반복(inner loop)에서는 각 모수 값에 대해 조건부 가치함수를 계산한다. 즉, 모수 값마다 가치함수를 계산하여 조건부 선택확률과 우도를 평가하는 방식으로, Rust 알고리즘과 Keane & Wolpin 알고리즘이 여기에 해당한다.

반면, 내부 반복 과정을 피하기 위해 데이터에서 추정된 조건부 선택확률로부터 조건부 가치함수를 도출하는 방법도 있는데, Hotz & Miller 알고리즘이 그 대표적인 예이다.

가. Keane & Wolpin 알고리즘

오차항이 정규분포를 따른다고 가정할 때, 추정 과정은 다음과 같다:

1. 모수 벡터를 선택한다.

2. 유한기간 모형의 가치함수 반복을 이용하여 $V(s) = \Gamma V(s)$ 를 계산한다.
3. 조건부 가치함수 $v(x, d)$ 를 계산한다.
4. 조건부 선택확률 $P(d|x, \theta)$ 을 계산한다.
5. 우도함수를 평가한다.
6. 우도의 수렴 여부를 확인한다.
7. 우도가 수렴될 때까지 위의 과정을 반복한다.

이러한 접근법은 계산상의 한계를 가지고 있다. 수치적 적분이 요구되고, 반복적인 최적화가 필요하며, 상대적으로 큰 상태공간을 다뤄야 한다는 문제점이 있다.

그러나 비정상(non-stationary) 문제를 다룰 수 있고, 부분적으로 관찰되지 않은 상태변수(partially unobserved states)인 임금 등을 쉽게 확장하여 처리할 수 있다는 장점도 있다.

나. Rust 알고리즘

오차항 ε 이 제1종 극단치 분포(type I extreme value distribution)를 따른다고 가정하면, 모형이 단순화될 수 있다. $\sigma = 1$ 로 설정하면 조건부 선택확률이 다음과 같은 닫힌 형태(closed-form)로 표현된다:

$$P[d|x, \theta] = \int 1[d = \arg \max v(x, d, \theta) + \varepsilon(d)] q(\varepsilon|x) d\varepsilon = \exp(v(x, d, \theta)) / \sum_{d'} \exp(v(x, d', \theta))$$

여기서 $v(x, d, \theta)$ 는 선택 d 와 관련된 조건부 가치함수이다.

기대 가치함수(expected value function) 또는 사회 잉여함수(social surplus function)는 다음과 같이 정의된다:

$$V(x) = \int V(x, \varepsilon) q(\varepsilon|x) d\varepsilon$$

이를 확장하면:

$$\begin{aligned} V(x) &= \int \max_d [u(x, d) + \varepsilon(d) + \beta \int \int V(x', \varepsilon') q(\varepsilon'|x') d\varepsilon' f(x'|x, d) dx'] q(\varepsilon|x) d\varepsilon \\ &= \int \max_d [u(x, d) + \varepsilon(d) + \beta \int V(x') f(x' | x, d) dx'] q(\varepsilon | x) d\varepsilon \end{aligned}$$

간단히 표현하면 $V(x) = \Gamma V(x)$ 이며, 이때 $V(x)$ 는 위 수축 사상의 고정점이다.

앞의 정의를 사용하면, 기대 가치함수와 조건부 가치함수 간의 관계는 다음과 같다:

$$\begin{aligned} v(x,d) &= u(x,d) + \beta \int \int V(x',\epsilon') q(\epsilon' | x') d\epsilon' f(x' | x,d) dx' \\ &= u(x,d) + \beta \int V(x') f(x' | x,d) dx' \end{aligned}$$

그리고 사회 잉여함수(기대 가치함수)는 다음과 같이 표현 가능하다:

$$V(x) = \int \max_d v(x,d) + \epsilon(d) q(\epsilon | x) d\epsilon$$

즉, 기대 가치함수 $V(x)$ 는 조건부 가치함수 $v(x,d)$ 를 통해 정의될 수 있다.

제1종 극단치 분포 가정하에서 다음과 같은 수축 사상이 성립한다:

$$V(x) = \int \max_d v(x,d) + \epsilon(d) q(\epsilon | x) d\epsilon = \gamma + \ln(\sum_{d'} \exp v(x,d'))$$

따라서 조건부 가치함수 $v(x,d)$ 는 다음 수축 사상의 유일한 고정점이다:

$$v(x,d) = u(x,d) + \beta \int [\gamma + \ln(\sum_{d'} \exp v(x',d'))] f(x' | x,d) dx'$$

여기서 γ 는 오일러 상수를 나타낸다.

유한기간 모형 ($T < \infty$)에서는 조건부 가치함수 $v_t(x,d)$ 가 다음과 같이 재귀적으로 정의된다:

$$v_T(x_T, d_T, \theta) = u_T(x_T, d_T, \theta)$$

중간기간의 조건부 가치함수는 다음과 같다:

$$v_t(x_t, d_t, \theta) = u(x_t, d_t, \theta) + \beta \int [\gamma + \ln(\sum_{d_{t+1}} \exp v_{t+1}(x_{t+1}, d_{t+1}, \theta))] f(x_{t+1} | x_t, d_t, \theta) dx_{t+1}$$

무한기간 모형에서는 $v(x,d,\theta)$ 가 앞선 수축 사상의 고정점이다.

Rust 알고리즘의 단계는 다음과 같다:

1. 모수벡터 선택: 모수벡터 θ 를 선택한다.
2. 다음 수축 사상을 풀어 조건부 가치함수 $v(x,d)$ 를 계산한다:

$$v(x,d) = u(x,d) + \beta \int [\gamma + \ln(\sum_{d'} \exp v(x',d'))] f(x' | x,d) dx'$$

3. 조건부 선택확률을 닫힌 형태(closed-form solution)로 계산한다:

$$P(d|x) = \exp(v(x,d)) / \sum_{d'} \exp(v(x,d'))$$

4. 우도함수를 평가한다:
5. 우도의 수렴 여부를 확인한다.
6. 수렴될 때까지 반복한다.

제1종 극단치 분포 가정의 이점과 단점은 다음과 같다. 장점으로는 조건부 선택확률의 닫힌 형태를 제공한다는 점과 조건부 가치함수 $v(x, d)$ 에 집중함으로써 차원의 저주를 완화한다는 점이 있다. 단점으로는 여전히 조건부 가치함수 $v(x, d)$ 를 수치적으로 계산해야 한다는 점과 상태변수의 차원이 큰 경우에는 계산이 복잡하고 시간이 오래 걸린다는 점이 있다.

다. HM 알고리즘

Aguirregabiria와 Mira(2002)를 따라, 조건부 선택확률을 통해 Nested Fixed Point 알고리즘을 피할 수 있다. 이 접근법은 상태공간을 이산으로 다루고, 사회 잉여함수를 다음과 같이 표현 가능하다:

$$\begin{aligned} V(x) &= \int \max_d [u(x,d) + \epsilon(d) + \beta \int V(x') f(x' | x,d) dx'] q(\epsilon | x) d\epsilon \\ &= \int \sum_d 1[\delta(x, \epsilon) = d] [u(x,d) + \epsilon(d) + \beta \int V(x') f(x' | x,d) dx'] q(\epsilon | x) d\epsilon \\ &= \sum_d P(d | x) [u(x,d) + E[\epsilon | d, x] + \beta \sum_{x'} V(x') f(x' | x, d)] \end{aligned}$$

이때, 오차항의 조건부 기댓값은 다음과 같다:

$$E[\epsilon | x, d] = (1/P(d|x)) \int \epsilon(d) 1[\delta(x, \epsilon) = d] q(\epsilon | x) d\epsilon$$

오차항 ϵ 이 제1종 극단치 분포를 따를 때 다음과 같은 중요한 성질이 성립한다:

$$E[\epsilon | x, d] = \gamma - \ln(P(d|x))$$

여기서 γ 는 오일러 상수를 의미한다. 이를 통해, 기대 가치함수를 구조적 모수와 조건부 선택확률의 함수로 명시적으로 나타낼 수 있다.

선택이 두 가지($D = 2$)인 간단한 경우를 생각해보자. 조건부 오차항의 기댓값은 다음과 같다:

$$E(\tilde{\epsilon}_d | d, X) = \gamma - \ln[P(d|X)]$$

표기의 단순화를 위해 $p_d = P(d | X)$ 로 정의하면 다음이 성립한다:

$$v_1 - v_2 = \ln(p_1/(1 - p_1))$$

선택 $d = 1$ 이 이루어질 조건은 다음과 같다:

$$\epsilon_2 < \epsilon_1 + v_1 - v_2 = \epsilon_1 + \ln(p_1/(1 - p_1))$$

선택 $d = 1$ 이 이루어진 경우 조건부 기댓값을 계산하면 다음과 같다:

$$E(\epsilon_1 | d = 1, X) = (1/p_1) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\epsilon_1 + \ln(p_1/(1 - p_1))} \epsilon_1 f(\epsilon_1, \epsilon_2) d\epsilon_2 d\epsilon_1$$

이를 정리하면:

$$E(\epsilon_1 | d = 1, X) = (1/p_1) \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_1 F(\epsilon_1 + \ln(p_1/(1 - p_1))) f(\epsilon_1) d\epsilon_1$$

여기서 F 와 f 는 제1종 극단치 분포의 누적분포함수와 확률밀도함수를 의미한다.

극단치 분포(extreme value distribution)의 밀도함수와 분포함수를 대입하고 대수적으로 정리하면 최종 형태는 다음과 같다:

$$E(\epsilon_1 | d = 1, X) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_1 e^{-(\epsilon_1 + \ln p_1)} e^{-\exp(-(\epsilon_1 + \ln p_1))} d\epsilon_1$$

이 결과는 극단치 분포를 갖는 확률변수의 기댓값 공식에서 유도된다.

앞선 방정식들을 행렬 형태로 표현하면 다음과 같다:

$$V = \sum_d P(d) * [u(d) + e(d, P) + \beta F(d) V]$$

여기서 V 는 상태의 기대 가치함수를 나타내는 벡터이고, $P(d)$ 는 조건부 선택확률 벡터이며, $u(d)$ 는 효용 벡터이다. $e(d, P)$ 는 조건부 오차항의 기댓값 벡터이고, $F(d)$ 는 상태 전이행렬이다. *는 원소 간 곱(element-by-element multiplication)을 나타낸다.

상태공간이 $X \in \{1, 2\}$ 이고 선택이 $d \in \{a, b\}$ 일 때 가치함수는 다음과 같다:

$$\begin{aligned} V(1) &= P[a | 1](u(1, a) + e(1, a) + \beta(f^{11a} V(1) + f^{12a} V(2))) \\ &\quad + P[b | 1](u(1, b) + e(1, b) + \beta(f^{11b} V(1) + f^{12b} V(2))) \\ V(2) &= P[a | 2](u(2, a) + e(2, a) + \beta(f^{21a} V(1) + f^{22a} V(2))) \\ &\quad + P[b | 2](u(2, b) + e(2, b) + \beta(f^{21b} V(1) + f^{22b} V(2))) \end{aligned}$$

이를 일반적인 형태로 다시 쓰면:

$$V(x) = \sum_d P[d|x] [u(x,d) + e(x,d) + \beta \sum_i f_{x,i}^d V(i)]$$

가치함수 $V(x)$ 는 다음과 같은 M 개의 선형방정식 체계로 정의된다:

$$V = \varphi(P) = (I_M - \beta F_u(P))^{-1} [\sum_d P(d) * (u(d) + e(d,P))]$$

여기서 전이행렬(transition matrix) $F_u(P)$ 는 다음과 같다:

$$F_u(P) = \sum_d P(d) F(d)$$

기대 가치함수의 해는 효용함수 u 와 전이행렬 F 가 모수 θ 에 의존하므로 θ 에 따라 달라진다.

Holtz-Miller 및 Aguirregabiria-Mira(HM-AM) 알고리즘 절차는 다음과 같다:

1. 조건부 선택확률 추정: 조건부 선택확률 $P_N(d)$ 을 비모수적(nonparametric)으로 추정한다.
2. 모수 선택: 모수 θ 를 선택한다.
3. 조건부 가치함수 계산:

$$V_N(x, \theta) = \varphi(P_N, \theta)$$

4. $v_N(x, d, \theta)$ 계산:

$$v_N(x, d) = u(x, d) + \beta \int V_N(x') f(x'|x, d) dx'$$

5. 새로운 조건부 선택확률 계산:

$$P(d|x, \theta) = \exp(v_N(x, d, \theta)) / \sum_{d'} \exp(v_N(x, d', \theta))$$

6. 우도함수를 평가한다.
7. 우도함수가 수렴할 때까지 반복한다.

HM-AM 알고리즘은 기대 가치함수를 구하는 과정에서 복잡한 연산 대신 선형방정식 체계를 푸는 것만으로 해결 가능하다는 계산상의 이점이 있다. 그러나 모든 상태에서 서의 조건부 선택확률(CCP)을 정확히 추정하기 위해 방대한 양의 데이터가 요구된다는

한계 또한 존재한다. 이에 대해 Aguirregabiria와 Mira(2002)는 기존 HM 방법을 일반화하여 CCP를 반복적으로 갱신하는 추정법을 제안하고 그 추정치가 점근적으로 효율적(asymptotically efficient)임을 입증하였으며, Arcidiacono와 Miller(2011)는 이 방법론을 확장하여 Heckman-Singer 형태의 관찰되지 않는 이질성(unobserved heterogeneity)까지 모형에서 다룰 수 있도록 하였다.

V

정리와 실무적 유의점

구조적 추정은 축약형 추정과 상호보완적 관계에 있으며, 각각의 고유한 강점을 활용하여 경제현상에 대한 포괄적 이해를 제공한다. 축약형 추정이 특정 정책 개입의 인과효과를 엄밀하게 식별하는 데 탁월하다면, 구조적 추정은 경제환경 변화 시 결과가 어떻게 달라질지를 일관되게 예측하는 능력에서 독보적 가치를 갖는다. 동적 이산선택(DDC) 모형을 중심으로 한 구조적 추정 방법론은 상태의존성, 전향적 기대, 내생적 선택집합 변화 등 현실경제의 복잡한 동태적 특성을 체계적으로 모형화할 수 있게 해준다.

가. 핵심 방법론적 원칙

구조적 추정의 성공적 수행을 위해서는 몇 가지 핵심 원칙을 준수해야 한다. 모수 식별 전략은 데이터의 어떤 변동이 어떤 구조적 모수를 식별하는지를 논리적으로 명확하게 제시해야 하며, 이는 외생적 변동, 함수형태 가정, 분포 가정 등 다양한 식별 원천을 체계적으로 활용하는 과정이다. 모형 명세에서는 경제학적 직관과 일치하는 합리적 가정을 유지하면서도 실증적으로 식별할 수 있는 형태로 구성해야 하며, 특히 상태공간의 차원과 계산 복잡성 간의 균형을 신중하게 고려해야 한다.

수치적 구현에서는 가치함수 반복법과 정책함수 반복법 중 문제의 특성에 적합한 해법을 선택하고, 수렴기준을 적절히 설정하며, 초기값 선택을 경제적 직관에 기반하여 합리적으로 수행해야 한다. 조건부 독립성 가정과 부가적 분리성 가정의 적절성을 신중하게 검토하고, 관찰되지 않는 이질성과 측정오차를 적절히 처리하는 전략을 수립해야 한다.

나. 실무적 구현 지침

실제 연구에서는 데이터 처리와 모형 추정 과정에서 여러 실무적 고려사항이 중요하다. 패널 데이터의 초기조건 문제는 추정 결과의 편향성에 결정적 영향을 미치므로, 초기분포를 별도로 모수화하거나 정상분포를 가정하는 등의 적절한 처리 방안을 선택해야 한다. 좌측검열(left censoring)이나 표본탈락 문제가 있는 경우 이를 명시적으로 모형에 반영하거나 적절한 가중치를 적용해야 한다.

추정 과정에서는 위치 정규화와 규모 정규화를 통해 모수 식별을 보장하고, 로그우도 함수의 수치적 안정성을 확보해야 한다. 여러 초기값에서 시작한 최적화가 동일한 해로 수렴하는지 확인하고, 헤시안 행렬의 양정치성을 점검하여 국소 최적해가 아닌 전역 최적해에 도달했는지 검증해야 한다. 표준오차 계산에서는 정보행렬, BHHH(Berndt-Hall-Hall-Hausman) 방법, 부트스트랩 등 적절한 방법을 선택하여 모수 추정의 불확실성을 정량화해야 한다.

다. 모형 검증과 진단

구조적 모형의 신뢰성 확보를 위해서는 체계적인 검증과 진단 과정이 필수적이다. 내부적 검증에서는 과잉식별 검정을 통해 모형의 내적 일관성을 확인하고, 추정에 사용되지 않은 보조 모멘트들과 모형이 예측하는 값들을 비교하여 모형의 설명력을 평가해야 한다. 외부적 검증에서는 표본 외 예측력, 정책 변화에 대한 예측 정확도, 그리고 가능한 경우 실험자료와의 비교를 통해 모형의 외적 타당성을 엄밀하게 점검해야 한다.

특히 중요한 것은 모형이 예측하는 주요 경제적 관계들이 기존 이론이나 실증연구 결과와 일치하는지, 그리고 모형의 정책 시뮬레이션 결과가 경제학적 직관과 부합하는지를 종합적으로 평가하는 것이다. 모형 검증에서 문제가 발견되면 상태변수 정의, 효용함수 명세, 전이확률 모형화, 정보구조 가정 등 핵심 요소들을 체계적으로 재검토하고 개선해야 한다. 구체적으로는 다음과 같은 모형 검증방식을 고려할 필요가 있다.

1) 내부적 검증: 과잉식별과 간접추론을 통한 일관성 점검

내부적 검증의 가장 핵심적인 도구는 과잉식별(overidentification) 전략과 간접추론(indirect inference) 방법론이다. 과잉식별 접근에서는 모수 추정 과정에서 실제로 사용한 목표 모멘트들 외에 추가적인 모멘트들을 의도적으로 남겨두고, 추정이 완료된 후

에 구조적 모형이 생성한 시뮬레이션 데이터에서 계산된 모멘트들과 실제 관측 데이터에서 계산된 동일한 모멘트들을 체계적으로 비교하여 모형의 내적 일관성을 점검한다. 이러한 방법은 추정된 모수들이 데이터의 여러 다양한 단면과 차원을 동시에 설명할 수 있는 일반성을 갖는지, 아니면 특정한 목표 모멘트에만 맞추어진 과적합의 문제를 보이는지를 구별하는 중요한 역할을 수행한다. 간접추론 접근법에서는 보조모형(auxiliary model)을 별도로 설정하고, 실제 관측 데이터에서 추정한 보조모형의 통계량들과 구조모형이 생성한 시뮬레이션 데이터에서 동일한 보조모형을 적용하여 얻은 통계량들을 비교한다. 이때 두 통계량 간의 차이를 최소화하도록 구조적 모수를 선택했다면, 검증 단계에서는 추정 과정에서 활용하지 않았던 별도의 보조통계량이나 추가적인 모멘트들을 독립적으로 비교하여 모형의 표본 외 재현 능력과 일반화 성능을 엄밀하게 확인한다.

2) 외부적 검증: 정책 변화와 반사실 분석을 통한 예측력 평가

정책 변화와 반사실 분석을 활용한 외부적 검증은 구조적 모형의 실질적 유용성을 평가하는 가장 중요하고 직접적인 방법이다. 이 접근법에서는 과거에 실제로 발생했던 제도적 변경이나 외부적 충격을 전략적으로 선택하여, 추정된 구조적 모수들을 고정한 상태에서 모형이 예측하는 동태적 반응과 균형조정 과정을 상세하게 시뮬레이션한다. 그리고 이를 사후적으로 관측된 실제 경제적 결과들과 다각도로 대조 분석한다.

이러한 접근법의 대표적인 고전 연구로 Keane and Moffitt(1998)는 1970년대 데이터로 추정한 여성의 노동공급 및 복지 프로그램 참여 모형이, 1981년의 대규모 복지 제도 개혁 이후 실제 관측된 행동 변화를 얼마나 정확하게 예측하는지 성공적으로 검증하였다.

이러한 검증 과정은 모형이 정책 충격의 복잡한 전파 경로와 일반균형 반응을 올바르게 정확하게 포착하는지를 실증적으로 보여준다. 만약 모형의 예측력이 기대에 미치지 못한다면, 데이터의 구성과 품질, 선택 제약 조건의 명세, 경제주체 간 이질성 분포의 가정, 정보 구조와 기대 형성 메커니즘, 그리고 시장균형 조건과 같은 모형의 핵심적 가정들을 체계적으로 재점검하고 개선해야 한다.

3) 비무작위 표본을 활용한 외적 타당성 평가

비무작위 표본을 활용한 검증은 구조적 모형의 외적 타당성(external validity)을 실용적이고 효과적으로 평가하는 중요한 방법론이다. 이러한 접근법의 대표적인 연구인

Keane and Wolpin(2007)은, 특정 주(state)의 데이터로 여성의 복지 프로그램 참여에 관한 동적 모형을 추정한 뒤, 복지제도가 매우 상이한 다른 주의 데이터를 '비무작위 홀드아웃(holdout) 표본'으로 사용하여 모형의 예측력을 성공적으로 검증하였다.

이 접근법에서는 특정 지역이나 시점의 데이터로 모형을 추정한 후, 추정 과정에서 사용하지 않은 다른 지역이나 시점의 독립적인 표본에 대해 모형의 예측 성능을 체계적으로 비교 평가한다. 이러한 표본분할 검증(split-sample validation)은 모형이 다른 경제적 환경이나 제도적 맥락에서도 안정적인 성능을 유지할 수 있는지를 확인할 수 있게 해준다.

다만 이 과정에서 표본 간의 차이가 단순히 관측되지 않는 이질성(unobserved heterogeneity)이나 제도적 맥락의 구조적 차이로 설명될 가능성을 충분히 고려해야 한다. 필요한 경우에는 역확률 가중치(IPW), 공변량 조정(covariate adjustment), 계층적 베이지안 모형 등의 고급 통계기법을 활용하여 표본 간 구조적 차이를 적절히 완화하고 통제된 후에 검증을 수행한다는 점을 연구 방법론에 명시적으로 포함해야 한다.

4) 실험자료를 활용한 엄밀한 인과적 검증

실험자료를 활용한 검증은 무작위 통제 실험(RCT)의 인과적 엄밀성에 기대어 구조적 모형의 예측력을 가장 객관적이고 신뢰할 수 있는 방식으로 평가하는 방법이다. 이러한 접근법의 대표적인 사례로 Todd and Wolpin(2006)은 멕시코의 조건부 현금 지원 프로그램인 PROGRESA의 사회실험 데이터를 활용하였다. 이들은 실험 시행 전 데이터로 추정한 구조적 모형이, 실제 실험에서 관찰된 고용 및 학교 등록률 변화를 얼마나 정확하게 예측하는지(out-of-sample fit)를 성공적으로 검증해 냈다.

이 방법론은 실험이 시행되기 이전의 데이터(pre-experimental data)만을 사용하여 구조적 모형을 추정한 후, 추정된 구조적 모수를 고정한 상태에서 실험적 개입을 모형에 입력하여 시뮬레이션을 수행한다. 그리고 모형이 예측한 결과와 실제 실험에서 관찰된 결과를 다각도로 비교 분석한다. 자연실험이나 RCT와의 비교를 통해 모형이 단순히 평균적 효과뿐만 아니라 효과의 이질성, 동태적 조정 경로, 일반균형 반응까지 정확히 예측하는지 확인해야 한다. 모형의 예측이 실험 결과와 불일치를 보이는 경우, 체계적인 오차 분석을 통해 불일치의 원인을 규명하고 모형의 핵심 가정들을 재검토한다. 이 과정에서 실험환경과 모형환경 간의 차이점, 실험 데이터와 관측 데이터 간의 표본 특성 차이 등을 신중하게 고려한 적절한 보정을 수행함으로써, 구조적 모형의 정책 불변성 가정

이 실제로 유지되는지를 엄밀하게 확인하고 신뢰할 수 있는 정책 평가 도구를 구축할 수 있게 된다.

라. 정책분석과 해석

반사실적 정책분석에서는 정책 불변 모수의 원칙을 엄격히 준수하면서 정책 변화가 작동하는 구체적 경로만을 선택적으로 수정해야 한다. 정책이 상태 전이확률에 영향을 미치는 경우 이를 적절히 반영하고, 일반균형 효과가 중요한 경우 시장균형 조건을 만족하는 해를 구해야 한다. 정책효과의 단기적 영향과 장기적 영향을 구분하여 분석하고, 정책효과의 이질성과 분포적 측면을 종합적으로 고려해야 한다.

모수 추정의 불확실성이 정책 분석 결과에 미치는 영향을 적절히 반영하기 위해, 추정된 모수들의 공분산 행렬을 활용한 시뮬레이션을 통해 정책효과의 신뢰구간을 구성하고 보고해야 한다. 정책분석 결과의 견고성을 확인하기 위해 핵심 가정들에 대한 민감도 분석을 수행하고, 대안적 모형 명세하에서도 주요 결론이 유지되는지 검토해야 한다.

마. 연구의 투명성과 재현가능성

구조적 추정 연구의 과학적 엄밀성과 정책적 신뢰성을 보장하기 위해서는 연구 과정의 투명성과 재현가능성이 확보되어야 한다. 모든 분석 코드는 버전 관리 시스템을 통해 체계적으로 관리되어야 하며, 설정 파일과 난수 시드를 완전히 고정하여 다른 연구자가 동일한 결과를 재현할 수 있도록 해야 한다. 데이터 전처리, 모형 추정, 검증, 정책분석의 단계별로 상세한 로그를 남기고, 주요 결과들은 단위 테스트와 회귀 테스트를 통해 지속적으로 검증해야 한다.

연구 보고서에는 모형 명세의 구체적 방법, 식별 전략의 논리적 근거, 수치적 구현의 세부 사항, 검증 결과와 모형의 한계점 등을 명시적이고 투명하게 기술해야 한다. 특히 연구 과정에서 시도했지만 성공하지 못한 접근법들과 그 이유를 솔직하게 보고함으로써 향후 연구자들이 유사한 시행착오를 피할 수 있도록 도와야 한다. 이러한 투명하고 엄밀한 연구 관행을 통해 구조적 추정은 경제정책 분야에서 신뢰할 수 있고 실용적인 분석 도구의 역할을 지속적으로 확대해 나갈 수 있을 것이다.

바. 구조적 분석의 정책 도입: 현실적 제약 요인과 해결 방안

구조적 분석모형을 실제 정책 수립 과정에 성공적으로 도입하기 위해서는 현실적인 인프라 제약 요인에 대한 면밀한 검토와 해결책 마련이 필수적이다. 복잡한 수리적 모형을 운용하고 해석할 수 있는 고도로 훈련된 전문인력의 부족과 고성능 연산 처리에 필요한 예산 확보 문제는 실무 도입의 주요 걸림돌로 작용할 수 있다. 따라서 단기적으로는 학계와의 협력을 통해 전문성을 보완하고, 장기적으로는 정책 분석가를 위한 체계적인 교육 프로그램 운영 및 안정적인 인프라 예산배정 등 구체적인 지원체계를 구축해야만 구조적 분석의 정책적 효용을 극대화할 수 있다.

참고문헌

- Aguirregabiria, V., & Mira, P., "Swapping the nested fixed point algorithm: A class of estimators for discrete Markov decision models," *Econometrica*, 70(4), 2002, pp. 1519~1543.
- Aguirregabiria, V., & Mira, P., "Dynamic discrete choice structural models: A survey," *Journal of Econometrics*, 156(1), 2010, pp. 38~67.
- Arcidiacono, P., & Miller, R. A., "Conditional choice probability estimation of dynamic discrete choice models with unobserved heterogeneity," *Econometrica*, 79(6), 2011, pp. 1823~1867.
- Fu, C., Ko, A., & Yoon, C., *Childcare and long-term care: A tale of altruism and strategic motives within the family*, Working Paper, 2025.
- Hotz, V. J., & Miller, R. A., "Conditional choice probabilities and the estimation of dynamic models," *Review of Economic Studies*, 60(3), 1993, pp. 497~529.
- Keane, M. P., & Moffitt, R., "A Structural Model of Multiple Welfare Program Participation and Labor Supply," *Econometrica*, 66(3), 1998, pp. 553~585.
- Keane, M. P., & Wolpin, K. I., "The career decisions of young men," *Journal of Political Economy*, 105(3), 1997, pp. 473~522.
- Keane, M. P., & Wolpin, K. I., "Exploring the Usefulness of a Nonrandom Holdout Sample for Model Validation: Welfare Effects on Female Behavior," *International Economic Review*, 48(4), 2007, pp. 1351~1378.
- Oh, H., & Yoon, C., "Time to build and the real-options channel of residential investment," *Journal of Financial Economics*, 135(1), 2020, pp. 255~269.
- Rust, J., "Optimal replacement of GMC bus engines: An empirical model of Harold Zurcher," *Econometrica*, 55(5), 1987, pp. 999~1033.
- Sieg, H., & Yoon, C., "Estimating dynamic games of electoral competition to evaluate term limits in U.S. gubernatorial elections," *American Economic Review*, 107(7), 2017, pp. 1824~1857.
- Sieg, H., & Yoon, C., "Waiting for affordable housing in New York City," *Quantitative Economics*, 11(1), 2020, pp. 277~313.
- Sieg, H., & Yoon, C., "Electoral accountability and control in U.S. cities," *Journal of Political Economy*, 130(11), 2022, pp. 2985~3023.

- Sieg, H., Yoon, C., & Zhang, J., "The impact of local fiscal and migration policies on human capital accumulation and inequality in China," *International Economic Review*, 64(1), 2023, pp. 57~93.
- Sieg, H., & Yoon, C., *Estimating a dynamic game of state fiscal policies under partisan governments*, Working Paper, 2025.
- Todd, P. E., & Wolpin, K. I., "Assessing the Impact of a School Subsidy Program in Mexico: Using a Social Experiment to Validate a Structural Model of Schooling and Work," *American Economic Review*, 96(5), 2006, pp. 1384~1417.
- Yoon, C., "Estimating a dynamic spatial equilibrium model to evaluate the welfare implications of regional adjustment processes: The decline of the Rust Belt," *International Economic Review*, 58(2), 2017, pp. 473~497.

제3장

연구 설계를 활용한 도구변수 구축 및 평가방법

김 준 성 | 성균관대학교 경제학과

지난 20~30년 간 응용미시 실증연구에서 인과성 분석 방법론은 크게 발전해 왔다. 이에 따라 응용미시 실증연구에서 인과성 분석을 수행하는 것은, 적어도 축약형(reduced-form) 모형을 사용하는 연구에서는 필수불가결한 요소가 되었다. 인과관계를 식별하는 가장 이상적인 방법은 무작위대조군실험(randomized controlled trial)이지만, 경제학 연구에서 무작위대조군실험을 통해 데이터를 수집하는 것은 비용이 매우 많이 들거나 연구윤리 상의 문제 등으로 불가능한 경우가 많으며, 일반적인 실증연구자들이 시도하기는 매우 어렵다. 이에 따라, 실증연구자들은 대부분 관측자료(observational data), 특히 공공데이터에 의존해 연구를 수행하고 있다.

관측자료를 이용하여 연구를 수행할 때, 설명변수(x 변수)가 종속변수(y 변수)에 미치는 인과적 영향을 분석하고자 한다면, 이러한 연구질문이 인과성 분석이 가능한 연구설계가 가능한가에 대한 질문을 먼저 고려해 볼 필요가 있다. 만약 인과성 분석을 위한 연구설계가 가능하지 못하다면, 인과성 분석을 위한 연구설계가 가능한 연구질문으로 변경하는 것이 때로는 필요하다. 물론, 이러한 과정은 학술연구에서 보다 두드러지기는 하며, 정책연구의 경우 특정 연구질문에 대한 분석이 필수적일 수도 있다. 다만 정책연구에서도 인과성 분석을 위한 연구설계가 불가능하다면, 대안적으로 사용된 방법론(예를 들어 최소자승법)을 통한 연구결과를 정책효과라고 강하게 주장하기에는 분명 어려움이 따를 것이다.

인과성 추론을 위한 연구설계(research design)란, 관찰 데이터에 내재한 선택편의(selection bias)나 내생성(endogeneity) 문제를 극복하기 위해 연구자가 의도적으로 설정하는 분석적 틀이자 전략적 청사진을 의미한다. 이는 잠재적 교란변수(confounding variables)를 통제하고, 특정 개입이 없었을 가상적 상황인 반사실(counterfactual)을 정교하게 묘사함으로써, 단순한 상관관계를 넘어선 진정한 인과효과를 식별하는 것을 목표로 한다. 이를 위해 무작위대조군실험(randomized controlled trial)과 같은 실험적 설계를 사용하거나, 현실에서 자연적으로 발생하는 실험적 상황, 즉 자연실험(natural experiment)을 활용하는 다양한 연구 설계 방법, 즉 이중차분법(difference-in-differences), 도구변수, 회귀불연속 설계(regression discontinuity design) 등을 적용한다. 결국 잘 짜인 연구설계는 “이 변화가 과연 결과를 유발했는가?”라는 인과관계의

핵심 질문에 답하는 가장 중요한 논리적 증명의 열쇠라 할 수 있다.

다만 연구설계가 가능한지는 연구 질문 선택의 폭을 현저히 저하할 우려가 있다. 그럼에도 불구하고, 다양한 인과성 분석 방법론 중 특정 방법론은 더욱 적용 가능성이 높고, 이에 따라 상대적으로 더 다양한 연구 질문을 분석할 수 있게 해 주는데, 그중 하나가 도구변수(instrumental variable, IV) 방법론일 것이다. 도구변수 방법론은 역사가 오래되었지만, 적절한 도구변수를 찾기 어렵다는 이유로 한동안 그 유용성이 낮게 평가되기도 했다. 그러나 1990년대부터 최근까지 지난 20여 년 동안 Josh Angrist 등이 제안한, 무작위성에 기반한 도구변수를 이용한 연구들이 발전하면서 다시금 주목을 받게 되었다. Angrist and Krueger(1991) 등은 도구변수가 가진 외생적 변이(exogenous variation)에 주목했는데, 이는 처치(treatment)가 내생적인 상황에서, 자연실험(natural experiment) 혹은 준실험(quasi-experiment)에 해당하는 외생적 변이를 가져와 인과효과를 식별하려는 시도라고 할 수 있다. 예를 들어, Angrist and Krueger(1991)에서는 의무교육 연령과 생년월일의 무작위성을 이용하여, 출생분기(birth quarter)를 도구변수로 사용, 교육이 임금에 미치는 인과효과를 추정하였다.

이처럼 자연실험이나 준실험에서 비롯된 외생적 변이가 있다면, 이를 통해 도구변수를 제안하고 인과효과를 추정하는 연구설계가 가능하다. 그러나 종종 외생적 변이의 발생단위와 연구자가 원하는 분석단위가 일치하지 않는 경우가 존재한다. 예를 들어, 외생적 변이는 국가나 산업단위에서 발생했으나, 분석하고자 하는 단위는 개인 혹은 지역(시군구)인 경우이다. 이러한 접근이 필요한 이유는, 국가나 산업수준의 외생적 충격은 종종 발견되는 반면, 개인이나 지역과 같이 더 미시적인(finier) 단위에서 연구자의 필요에 맞는 외생적 변이를 찾기는 매우 어렵기 때문이다. 따라서 이러한 상위단위(aggregate level) 혹은 다른 단위의 외생적 충격을 하위 단위로 할당하는 방식으로 도구변수를 구축하는 방법이 개발되어 왔다.

본 연구보고서에서는 주로 이러한 연구 설계와 이를 바탕으로 한 도구변수에 집중하여, 대표적인 도구변수들을 소개하고 이론적 분해를 통해 그 신뢰성을 살펴보고자 한다. 또한, 이러한 도구변수들이 어떤 가정하에서 인과효과를 추정하게 하는지, 그리고 중요가정에 대한 통계적 검증 및 강건성 분석 방법에 대해 논하고자 한다. 기존 문헌에서 이러한 도구변수를 (연구)설계기반(design-based) 도구변수(Borusyak et al., 2025) 혹은 공식 도구변수(formula IV)라고 지칭하며(Borusyak and Hull, 2025), 본 연구보고서에서도 두 용어를 교차하여 사용하고자 한다.

가장 잘 알려진 설계기반 도구변수인 변이할당 도구변수(shift-share IV) 혹은 바틱

도구변수(Bartik, 1991)를 시작으로, 최근 문헌에서 제시한 두 가지 식별 방식 (Goldsmith-Pinkham, Sorkin, and Swift, 2020; Borusyak, Hull, and Jaravel, 2022)을 비교하고, 연구 질문의 유형 등에 따라 어떤 방식이 더 적절한지를 알아볼 것이다. 또한, 변이할당 도구변수를 일반화하는 측면을 가지고 있는 재중심화 도구변수 (recentered IV)와 시뮬레이션 도구변수(simulated IV)를 살펴보고(Borusyak and Hull, 2023; Borusyak et al., 2025), 각 방법론의 활용 가능성을 탐색한다. 이 외에도 사회경제적 네트워크 분석에서 잘 알려진 도구변수(Bramoullé, Djebbari, and Forti, 2009)를 살펴보고, 변이할당 도구변수 혹은 재중심화 도구변수와 갖는 접점을 알아볼 것이다. 그 외에도 공식기반 도구변수들의 몇 가지를 추가로 살펴본다.

각각의 설계기반 도구변수에 맞춰 추정방법, 1단계(first-stage) 추정량에 대한 검정 방법의 최근 동향, 주로 사용되는 강건성 검정방법, Stata 코드 등을 함께 소개하고, 대표적인 적용사례(canonical example)들을 살펴보며, 기존 문헌에서 설계기반 도구변수들이 어떻게 적용되고, 검증되었는지 살펴봄으로써, 실증 연구자들에게 실제적 지침 (practical guide)을 제공하고자 한다.

설계기반 도구변수를 소개하기에 앞서, 전통적인 자연 실험(natural experiment)에 의존하는 도구변수와 설계기반 도구변수의 차이점을 생각해 볼 필요가 있다. Angrist and Krueger(1991)의 출생분기(quarter of birth) 도구변수와 같은 전통적인 자연실험 도구변수는 제도적 규칙(의무 교육법)이나 자연적 현상에 의해 우연히 형성된 단일한 외생적 사건을 활용한다. 연구자는 이러한 단일 사건에 의한 변동을 그대로 도구변수로 사용하며, 해당 변수가 결과 변수에 직접적인 영향을 미치지 않는다는 가정에 의존한다. 반면, 설계기반 도구변수는 연구자가 서로 다른 두 차원의 데이터(예: 지역별 산업 비중과 국가적 산업 충격)를 결합하여 직접 구축한(constructed) 도구변수이다. 예를 들어 변이할당 도구변수는 단일 사건에 의존하는 것이 아니라 다수의 산업에서 발생하는 수많은 미시적 충격이 집계되는 과정에서 발생하는 준무작위(quasi-random) 변동을 활용한다는 점에서 전통적인 도구변수와 다르다.

또한 전통적 도구변수와 설계기반 도구변수는 외생성 가정의 대상과 차원이 다르다. 전통적 자연실험에서는 도구변수 그 자체가 개인의 특성과 무관하게 무작위로 배정되었다는 가정이 핵심이다. 그러나 설계기반 도구변수는 외생적 충격이 할당되는 비중 (share)이 내생적일지라도 식별이 가능하다는 점에서 차별화된다. 전통적 관점에서는 처치 혹은 충격에 대한 노출(exposure) 자체가 외생적이어야 하지만, 설계기반 도구변수에서는 노출도로 사용되는 비중이 분석단위 개체들의 특성과 상관관계가 있더라도 충

격이 외생적이고 그 수가 충분히 많다면 인과효과를 식별할 가능성이 생긴다(Borusyak et al., 2022). 이는 설계기반 도구변수가 단일한 거대 실험이 아닌, 다수의 작은 자연 실험을 결합(pooling)한 형태라고 이해할 수 있을 것이다.

II

변이할당 도구변수 구축 및 인과효과 식별

1. 변이할당 도구변수 소개

연구설계에 기반해 구축된 도구변수 중 최근 문헌에서 가장 빈번히 사용되는 변이할당 도구변수에 대해 먼저 살펴보고자 한다. 변이할당 도구변수는 주로 지역단위(예: 시군구, 통근권[commuting zone], 카운티[county], local government area 등) 설명변수 x 가 결과변수 y 에 미치는 인과적 영향을 추정할 때 사용된다. 물론 설명변수가 반드시 지역단위 변수여야 하는 것은 아니며, 결과변수 역시 설명변수와 같은 지역단위 변수일 수도 있고, 개인이나 기업 등 더 미시적인(finier) 단위여도 무관하다. 즉, 지역단위 데이터를 분석하거나, 개인, 가구, 혹은 기업단위 데이터에 이들이 속한 지역 변수가 미치는 인과적 영향을 분석하는 경우를 생각해 볼 수 있다.

설명의 편의를 위해 식 (1)의 단순회귀모형을 통해 이를 살펴보자.¹⁾

$$y_i = \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

y_i : 평균 제거(demeaned) 결과변수(종속변수)

x_i : 설명변수

ϵ_i : 관측되지 않은 이질성(unobserved heterogeneity) 혹은 오차항

$$x_i = \sum_{k=1}^K \underbrace{s_{ik}}_{share} \underbrace{g_{ik}}_{shift}, \quad (2)$$

전형적인 예시(canonical example)로 2013년부터 2023년까지의 10년 간의 지역

1) 만약 통제변수나 고정효과 등이 포함된다면, 종속변수와 설명변수를 이러한 변수의 영향을 제거한 잔차화된 값으로 변화함으로써 단순회귀모형을 적용할 수 있다.

내 임금 변화(change) 또는 성장률(wage growth)을 y_i 로, 같은 기간의 지역 내 고용 변화 혹은 고용성장률(employment growth)을 x_i 로 사용하는 경우를 생각해 볼 수 있다. 이 경우 식 (1)과 (2)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta \log(wage)_i = \beta \Delta empl_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$\Delta empl_i = \sum_{k=1}^K \underbrace{\frac{empl_{ik}}{empl_i}}_{share} \underbrace{g_{ik}}_{shift}, \quad (4)$$

위의 식(4)에서 $empl_i$ 는 i 지역의 총근로자 수, $empl_{ik}$ 는 해당 지역 내 k 산업의 근로자 수를, 그리고 g_{ik} 는 지역 내 k 산업의 고용성장률을 의미한다. 다만, 종종 g_{ik} 가 관측 가능하지 않은 경우가 있어 대신 전국단위 k 산업의 충격 g_k 를 사용하는 적용 사례도 있다(Acemoglu and Restrepo, 2020).

변이할당 도구변수 방법이 지역단위 설명변수를 이용하는 경우 많이 사용되는 이유는, 설명변수가 K 개의 산업, 국가, 또는 부문별 충격(shock)의 가중평균(weighted average)이나 내적(inner product)의 형태로 구성되기 때문이다. 이 때 K 개로 분류된 부문은 모든 관측치(지역)에 공통으로 적용될 수 있어야 한다. 즉, $K=20$ 개의 산업(부문) 분류는 서울, 부산, 대구 등 모든 지역에서 동일하게 측정되며, 특정 산업별 충격(예: 관세 인상 등)은 이 K 개의 산업의 지역 내 비중에 따라 각기 다른 효과로 나타날 것이다.

만약 기업단위 데이터를 사용한다면, 각 기업의 부서 분류가 상이할 수 있다. 예를 들어 A기업은 10개, B기업은 15개의 부서로 나뉜다면, 특정 충격이 서로 다른 부서 체계에 동일하게 작용한다고 가정하기 어렵다. 또한, 기업마다 제각각인 부서 분류를 표준화하여 조화(harmonize)시키는 작업 역시 사실상 불가능에 가깝다. 설령 분류를 조화시키는 데 성공하더라도, 이질적인 A, B 두 기업의 모든 부서에 공통으로 영향을 미치는 외생적 충격과 그 인과효과를 식별할 수 있는 연구 설계를 찾기란 매우 어려울 것이다.

이처럼 변이할당 도구변수는 설명변수가 가중평균 구조라는 점에 착안하여 설계된다. 변이할당 도구변수를 구축하는 공식은 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 먼저, Goldsmith-Pinkham et al.(2020)는 비중(share) 자체의 외생성에서 인과관계 식별이 가능하다고 주장한다. 이 접근법은 내생적일 수 있는 현재의 비중 s_{ik} 를 외생적인 다른 비중으로 대체하는 방식이다. 주로 해당 지역의 역사적 과거 비중을 사용하지만, 다른 국가의 비중을 활용하는 등 다양한 변형이 가능하다. 이러한 방식의 변이할당 도구변수

z_i^{GPSS} 는 아래 수식과 같이 나타낼 수 있다.

$$z_i^{GPSS} = \sum_{k=1}^K s_{ik0} g_k = \sum_{k=1}^K \frac{emp_{ik0}}{emp_{i0}} g_k, \quad (5)$$

s_{ik0} : 기준연도($t = 0$, 과거시점)에, 산업 k 가 지역에서 차지하는 고용 비중.

반면, Borusyak et al.(2022)에서는 비중이 외생적이지 않더라도 충격(shock)의 외생성만을 이용한 식별이 이루어질 수 있다고 보며, 기존 충격 g_k 를 외생적인 충격 g_k^o 로 대체한다. 이는 주로 다른 국가의 부문별 충격과 같은 변수를 외생적이라고 가정하고 활용하는 방식이다. 이러한 방식의 변이할당 도구변수 z_i^{BHJ} 는 아래 수식과 같이 표현할 수 있다.

$$z_i^{BHJ} = \sum_{k=1}^K s_{ik0} g_k^o = \sum_{k=1}^K \frac{emp_{ik0}}{emp_{i0}} g_k^o, \quad (6)$$

g_k^o : 다른 국가 o 의 산업 k 에 대한 국가 수준 고용증가율.

다만 실제 응용연구에서는 비중을 이용한 식별과 충격을 이용한 식별이 모두 쓰이며, 비중과 충격을 함께 대체하는 방법 또한 종종 사용된다(Acemoglu and Restrepo, 2022 등). 요약하면, 변이할당 도구변수는 “집합적 노출 연구 설계(pooled exposure research design)”에 기반하고 있다. 여기서 비중은 각 지역 i 가 공통 충격 g_k 에 얼마나 노출되었는지를 나타내는 노출도(exposure)이며, g_k 는 모든 지역에 영향을 미치는 공통 충격(common shock)을 의미한다. 이러한 공통 충격이 존재한다면 변이할당 도구변수를 쉽게 구축할 수 있다는 점이 이러한 연구 설계의 가장 큰 장점이다. 그러나 그 정당성은 연구 설계의 기반이 되는 여러 가정이 얼마나 현실에 부합하는지에 달려있다.

2. 변이할당 도구변수 - 외생적 비중을 이용한 설계

외생적 비중을 이용해 변이할당 도구변수를 구축하는 경우를, 논의의 편의를 위해 평균 제거 횡단면 모형인 식 (1)을 기본모형으로 삼아 설명하려고 한다.

$$y_i = \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$x_i = \sum_{k=1}^K s_{ik} g_k = \sum_{k=1}^K \frac{emp_{ik}}{emp_i} g_k \quad (7)$$

$$z_i^{GPSS} = \sum_{k=1}^K s_{ik0} g_k = \sum_{k=1}^K \frac{emp_{ik0}}{emp_{i0}} g_k \quad (5)$$

$$\hat{\beta}_{IV}^{GPSS} = (Z'X)^{-1}Z'y. \quad (8)$$

앞선 절의 식 (5)에서 설명한 바와 같이 변이할당 도구변수 z_i^{GPSS} 는 설명변수 x_i 의 현재 비중 s_{ik} 를 기준연도($t=0$)의 비중(s_{ik0})로 대체한 것이다. 따라서 이 도구변수를 이용한 인과효과 식별은 기준연도 비중 s_{ik0} 의 외생성(exogeneity)과 변이(variation)에 의존한다. 도구변수 추정법을 사용하면 식 (8)과 같은 도구변수 추정량을 얻게 되며 여기서, Z , X , y 는 각각 $n \times 1$ 차원의 도구변수, 설명변수, 결과변수 벡터이다.

Goldsmith-Pinkham et al.(2020)이 제시한 예를 사용하면, 인과관계 식별이 왜 s_{ik0} 의 외생성에 근거하는지 쉽게 이해할 수 있다. 이 예시에서 지역의 산업 비중은 두 개의 산업(예: 제조업, 서비스업)으로만 구성되므로, 두 산업의 비중의 합은 1이다. 이 때, x_i 와 z_i^{GPSS} 는 아래의 식 (9)와 (10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_i = s_{i1} g_1 + s_{i2} g_2. \quad (9)$$

$$z_i^{GPSS} = s_{i1,0} g_1 + s_{i2,0} g_2 = s_{i1,0} g_1 + (1 - s_{i1,0}) g_2 = g_2 + s_{i1,0} (g_1 - g_2) \quad (10)$$

도구변수 추정의 1단계(first-stage) 추정식, 즉 설명변수를 도구변수에 회귀시키는 식에 식 (10)의 결과를 대입하면 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_i &= \pi_0 + \pi_1 z_i + v_i \\ &= \pi_0 + \pi_1 (g_2 + s_{i1,0} (g_1 - g_2)) + v_i \\ &= \pi_0 + \pi_1 g_2 + \pi_1 (g_1 - g_2) s_{i1,0} + v_i \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)의 마지막 줄에서 확인할 수 있듯이, s_{i10} 는 우변에서 i 에 따라 변하는 유일한 변수이다. 이 변수가 도구변수의 핵심 가정, 특히 외생성 가정을 만족하면 2단계 최소자승법을 통한 일치추정량(consistent estimator)을 얻을 수 있다. 여기서 외생성을 만족해야 하는 변수 s_{i10} 의 의미를 다시 살펴보면, 이는 기준연도($t = 0$)에 각 지역 i 가 전국적인 공통 충격 $g_1 - g_2$, 즉 제조업과 서비스업의 고용성장률 차이에 얼마나 노출되었는지를 나타내는 노출도(exposure)이다. 즉, 전국단위의 공통 충격이 각 지역의 기준연도 제조업 비중에 따라 차등적으로 할당되는 구조라고 할 수 있다. 그러므로 식별은 기준연도 제조업 비중에 의해 이루어지는 연구설계이다.

앞선 설명처럼 s_{i10} 가 사실상 도구변수의 역할을 한다는 점에 착안하여, 도구변수의 신뢰성 가정을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 연관성(relevance) 가정이 성립하려면 1단계 회귀식에서 s_{i10} 의 계수인 $\pi_1(g_1 - g_2)$ 가 0이 아니어야 한다. 일반적으로 전국적인 공통 충격 $g_1 - g_2$ 는 0이 아니므로, 결국 π_1 이 0이 아니어야 한다는 조건이 된다. 이를 지역별 고용이 K 개의 부문(산업)으로 구성된 일반적인 경우로 확장하면, s_{i10}, \dots, s_{iK0} 중 최소 하나라도 그 계수가 0이 아니어야 한다는 조건으로 일반화할 수 있다. 이는 설명변수 x_i 를 변이할당 도구변수 z_i^{GPSS} 에 회귀시켰을 때, z_i^{GPSS} 의 계수가 0이 아니라는 조건과 일치한다.

둘째, 외생성(exogeneity) 가정은 기준연도 비중 s_{i10} 이 식 (1)에 있는 오차항 ϵ_i 와 상관관계가 없어야 함을 의미한다. 이를 K 개의 산업으로 구성된 일반적인 경우로 확장하면, 모든 기준연도 비중 s_{i10}, \dots, s_{iK0} 이 오차항과 상관관계가 없어야 한다.

$$\text{모든 } k \text{에 대하여 } E[\epsilon_i s_{ik0}] = 0 \quad (12)$$

즉, 각각의 기준연도 산업 비중은 지역 내 고용성장률 x_i 를 통해서만 결과변수인 임금 변화에 영향을 미쳐야 하며, 그 외의 다른 경로로 직접적인 영향을 미쳐서는 안 된다. 위의 조건이 만족될 때 변이할당 도구변수 z_i^{GPSS} 는 식 (13)과 같이 외생성 가정을 만족시킨다.

$$E[\epsilon_i z_i] = 0 \quad (13)$$

위에서 살펴본 두 가정 중 연관성 가정은 약한 도구변수(weak instrument) 검정법을 이용해 그 타당성을 검토할 수 있다. 기존 문헌에 다양한 검정방법이 존재하며 (Andrews, Stock, and Sun, 2019), 관련 논의와 최신 동향은 부록 1에서 자세히 다룬다.

반면 외생성 가정은 근본적으로 통계적 검정이 불가능하지만, 과식별 검정(overidentification test) 등을 통해 간접적으로나마 타당성을 확인해 볼 수 있다. 이처럼 직접적인 검증은 어렵지만, 연구자들은 외생성 가정의 타당성을 강화하기 위한 여러 보완적인 방법을 제시해 왔다. 여기서는 바로 그 방법들을 정리하고자 한다.

첫째, 균형성 검정(balance test)을 수행해 볼 수 있다. 이는 기준연도 비중 s_{i10}, \dots, s_{iK0} 을 다른 지역단위 변수(w)에 각각 회귀분석하여 두 변수 간의 상관관계 유무를 확인하는 방법이다. 만약 이 회귀분석에서 특정 지역변수의 계수가 유의하게 나타난다면, 해당 비중 s_{ik0} 이 그 변수와 상관되어 있다는 의미이므로 외생성 가정을 만족하지 못할 가능성이 있다. 이 경우, 해당 지역변수 w 를 통제변수로 포함하여 문제를 완화할 수 있다. 혹은 문제가 되는 부문 k 를 분석에서 제거하고 변이할당 도구변수를 재구축하는 방법도 고려해 볼 수 있을 것이다.

둘째, GPSS 변이할당 도구변수 설계는 기본적으로 각 산업의 선결된 비중(predetermined shares)을 처치의 강도(treatment intensity)로, 국가적 성장률(national growth rates)을 정책의 크기(policy size)로 활용하는 이중차분법(Difference-in-Differences, DID)의 성격을 갖는다. 이러한 관점에서 분석의 타당성을 강화하기 위해, 이중차분법의 핵심 전제인 평행추세 가정(parallel trends assumption)을 만족하는지 확인하는 검정을 수행할 수 있다. 이는 기준연도 이전 시점의 종속변수 변화량(changes in outcome) 혹은 시차 종속변수($y_{i,t-k}$)를 데이터에서 활용할 수 있을 때 가능하다. 구체적으로는 충격이 발생하기 이전 기간(pre-period)의 결과변수를 종속변수로 설정한 뒤, 개별 비중(s_{ik0})을 설명변수로 하는 축약형(reduced-form) 모형을 추정하여 검정할 수 있다. 만약 도구변수가 과거의 결과변수 변화를 유의하게 예측한다면, 이는 분석시점 이전에 이미 고노출 지역과 저노출 지역 간에 다른 추세가 존재했음을 의미한다. 이는 평행추세 가정이 위배됨을 시사하며, 결과적으로 도구변수의 식별 가정인 비중의 외생성을 만족시키지 못할 가능성이 높다. 이러한 검정은 종속변수뿐만 아니라 활용가능한 다른 통제변수의 기준연도 값(baseline characteristics)에 대해서도 진행하여, 밸런스 테스트(balance test)를 수행함으로써 분석의 신뢰도를 높일 수 있다.

셋째, leave-one-out 방식을 활용하여 충격의 외생성을 강화할 수 있다. 이는 기준연도 비중 s_{i10}, \dots, s_{iK0} 이 외생적이더라도, 변이할당 도구변수를 구성하는 다른 요소인 전국단위 충격 g_k 가 특정 지역의 경제상황에 영향을 받아 계산될 때 발생하는 내생성 문제를 해결하려는 방법이다. 구체적으로 k 산업의 전국 고용성장률 g_k 를 계산할 때, 분석

대상이 되는 지역의 데이터를 제외하고 나머지 지역 값의 합으로 충격을 구성하는 것이다. 이 방법을 통해, i 지역의 고유한 특성이 전국단위 충격에 영향을 미쳐 발생하는 역인과관계(reverse causality)의 가능성을 차단할 수 있다.

넷째, 로템버그 가중치(rotemberg weight)를 계산하여 각 비중의 유효성을 진단해 볼 수 있다. 이는 어떤 산업 k 의 비중이 외생성 가정을 위해할 가능성이 높은지 식별하는 데 도움을 준다. 로템버그 가중치 계산을 통해 식별 가정의 타당성을 강화할 뿐 아니라 부문별 이질적 효과를 탐색할 수도 있으므로, 뒤에서 보다 자세히 설명하겠다.

3. 실제 데이터 구축 및 로템버그 가중치 계산방법

Goldsmith-Pinkham et al.(2020)의 접근법에서 변이할당 도구변수 추정량은 K 개의 비중이라는 다수의 도구변수를 결합한 일반화 적률법(generalized method of moments, GMM) 추정량으로 해석될 수 있으며, Rotemberg(1983)의 결과를 바탕으로 z_i^{GPSS} 를 도구변수로 이용한 2단계 최소자승법 추정량 $\hat{\beta}_{IV}^{GPSS}$ 와 s_{i10}, \dots, s_{iK0} 를 도구변수로 이용한 일반화 적률법 추정량 $\hat{\beta}_{GMM}^{GPSS}$ 이 서로 동일함을 다음과 같이 보였다.

$$\hat{\beta}_{IV}^{GPSS} = (Z'X)^{-1}Z'y = (X'SGG'S'X)^{-1}X'SGG'S'y = \hat{\beta}_{GMM}^{GPSS} \quad (14)$$

식 (14)에서 S 는 s_{i10}, \dots, s_{iK0} 로 구성된 $n \times K$ 행렬이며, G 는 충격 g_k 로 구성된 $K \times 1$ 벡터이다. 행렬 X 와 Z 를 각각 설명변수, 도구변수의 행렬 혹은 벡터라고 하고, S_k 를 행렬 S 의 k 번째 열, 즉 $S_k = (s_{1k0}, \dots, s_{nk0})'$, $\hat{\beta}_k$ 는 이를 도구변수로 이용한 2단계 최소자승법 추정량이라고 하면, $\hat{\beta}_{IV}^{GPSS}$ 는 식 (15)와 (16)으로 표현할 수 있다.

$$\hat{\beta}_{IV}^{GPSS} = \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k \hat{\beta}_k, \quad (15)$$

$$\hat{\alpha}_k = \frac{g_k S_k' X}{\sum_k g_k S_k' X}. \quad (16)$$

위의 식 (16)에서 나타난 $\hat{\alpha}_k$ 가 바로 로템버그 가중치이다. 이 가중치는 k 번째 부문의 충격 g_k 가 전체 추정치 $\hat{\beta}_{IV}^{GPSS}$ 에 얼마나 기여하는가를 나타내는 지표라 할 수 있다. 만약

특정 부문 k 의 가중치가 매우 크다면, 이는 전체 추정치가 해당 부문의 충격으로 과도하게 좌우된다는 뜻이며, 결과의 강건성이 떨어질 수 있음을 시사한다.

이러한 로템버그 가중치를 이용하여 비중을 이용하는 변이할당 도구변수의 강건성을 확인할 뿐 아니라, 외생성 가정의 타당성을 강화할 수도 있다. 만약 가중치 $\hat{\alpha}_k$ 가 큰 특정 부문의 $\hat{\beta}_k$ 값이 전체 추정치 $\hat{\beta}_{IV}^{GPSS}$ 와 유사하다면, 이는 추정치가 소수의 특정 부문에 의해 좌우되지 않음을 의미하므로 인과효과 추정의 정당성이 강화된다. 반대로, 상대적으로 큰 가중치를 갖는 부문의 $\hat{\beta}_k$ 값이 $\hat{\beta}_{IV}^{GPSS}$ 및 다른 $\hat{\beta}_k$ 와 유사하지 않다면 다음과 같은 조치를 고려할 수 있다. 첫째, 문제가 되는 해당 부문 k 를 분석에서 제외하고 변이할당 도구변수를 재구축한다. 둘째, 만약 해당 부문이 연구자의 판단에 있어 핵심적인 부문이라면(예: 영국 이민 분석에서 인도 출신 이민자), 그 부문만을 이용한 별도 분석을 수행하거나, 다른 연구설계를 모색할 수도 있다.

Goldsmith-Pinkham et al.(2020)의 제안 이후, 외생적 비중을 이용한 연구 설계에서 로템버그 가중치와 관련 시각자료(그래프, 표)를 함께 제시하는 것이 표준적인 분석 절차로 자리를 잡아가고 있다. 아래에서는 로템버그 가중치를 계산하기 위한 데이터 구조화 방법 및 Stata 코드를 소개한다.

식 (16)에 나타난 로템버그 가중치 계산 공식을 살펴보면, 가중치를 구하는 데 어떤 데이터와 변수가 필요한지 파악할 수 있다. 구체적으로 모든 부문에 대한 충격 g_k 와 비중 S_k 가 모든 관측치에 대해 준비되어 있어야 하며, 설명변수 X 가 필요하다. 따라서 분석에 필요한 데이터는 아래 <표 3-1>과 같은 형식으로 준비되어야 한다. 첫 번째 행은 변수명인데, 변수명 ID는 관측단위(보통 지역)의 고유번호를 의미하여, y 는 결과변수, x 는 설명변수를 나타낸다. s_01 부터 s_0K 까지는 분류별 비중을 뜻하며, 여기에서 0이 들어간 것은 도구변수에 쓰일 기준연도 비중이라는 것을 의미한다. g_1 부터 g_K 까지는 전국단위의 k 부문 충격을 의미한다. 설명변수 x 를 구축함에 있어서는 기준연도 비중 이외에도 분석연도 비중 변수들(s_1, \dots, s_K)도 필요하지만, 실제 도구변수 추정 혹은 로템버그 가중치 계산 시 이러한 비중이 개별적으로 필요하지는 않기 때문에 아래 표에서는 생략하였다. 연구자가 Goldsmith-Pinkham et al.(2020) 혹은 Borusyak et al.(2022) 방식의 변이할당 도구변수를 실제 적용함에 있어서는 아래 표에 나타난 변수들이 다 잘 구축되었는가를 가장 먼저 체크해야 할 것이다.

〈표 3-1〉 로템버그 가중치 계산을 위한 데이터 구조

ID	y	x	s_01	s_02	...	s_0K	g_1	g_2	...	g_K
1	0.767	0.082	0.001	0.003	...	0.004	591	942	...	2619
2	0.795	0.335	0.093	0.082	...	0.079	591	942	...	2619
3	0.723	0.108	0.033	0.031	...	0.034	591	942	...	2619
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

자료: 저자 작성.

위에서 구성한 데이터를 바탕으로, 아래와 같은 Stata코드를 이용해 직접 로템버그 가중치를 계산할 수 있다.

```

*****
* Rotemberg weights 계산 및 그래프 작성 코드
* Data: Economic Connectedness (social capital) and immigration
* (American Community Survey 등을 바탕으로 한 저자 구축 데이터)
*****

* 데이터 불러오기
use "Immi_practice.dta", clear

*****
* Residualize y and x (y와 x변수를 잔차화)
*****
qui xi: reg soc_cap i.statefip, cl(statefip)
predict yhat, xb
gen soc_cap_res=soc_cap-yhat

qui xi: reg immigration i.statefip, cl(statefip)
predict xhat, xb
gen immigration_res=immigration-xhat

*****
* GPSS 변이할당 도구변수 구축
* 참고: 위 데이터의 s_01, ... , s_0K는 아래 코드에서
* share1960s1, ... , share1960sK에 해당
*****
forvalues i=1(1)49 {
    gen sg`i'=share1960s`i'*g`i'
}
egen z_iv=rowtotal(sg*)
save "Immi_practice_resid.dta", replace
ivreg2 soc_cap_res (immigration_res = z_iv), cl(statefip) first
weakivtest

*****
* 로템버그 가중치(Rotemberg weight) 계산
*****

```

```

forv i = 1/49{
    gen rw_denom`i' = g`i'*share1960s`i'*immigration_res
}
egen rw_denom_sum = rowtotal(rw_denom*)
collapse (sum) rw_denom*
forv i = 1/49{
    gen rotem`i' = rw_denom`i'/rw_denom_sum
}
keep rotem*

*****
* Rotemberg weight만 Rotem이라는 행렬로 저장
*****
mkmat rotem1-rotem49 in 1/1, matrix(Rot)
mat Rotem=Rot'

*****
* Beta_k (각각의 share로 IV regression 한 추정치) 계산
*****
use "Immi_practice_resid.dta", clear

*****
* B: Beta_k, KPF: Kleibergen-Paap F = Olea-Montiel & Pflueger F
* (when there is only one endog x and one z)
* CDF: Cragg-Donald, G: g_k (shocks)
*****
matrix B = J(49,1,.)
matrix KPF = J(49,1,.)
matrix CDF = J(49,1,.)
mkmat g1-g49 in 1/1, matrix(Gr)
matrix G= Gr'
forvalues i = 1/49 {
    quietly ivreg2 soc_cap_res (immigration_res = share1960s`i'),
    cl(statefip) first savefirst saveprefix(st`i') nocons
    est store reg`i'
    matrix B[`i',1]=_b[immigration_res]
    matrix KPF[`i',1]=_e(widstat)
    matrix CDF[`i',1]=_e(cdf)
}

*****
* 행렬 ALL에다 결과 값을 모두 정리한 후, 데이터에 변수들로 추가
*****
matrix ALL= Rotem, B, KPF, CDF, G
matrix colnames ALL = alpha_hat1 Beta KPF CDF Gk
svmat double ALL, names(col)
local K = rowsof(ALL)
keep alpha_hat Beta KPF CDF Gk
keep in 1/`K'
gen abs_alpha=abs(alpha_hat1)

*****
* 미리 준비한 국가명(countries of origin) 리스트와 결합 후 저장
* BPL_countries.dta (국가명 데이터)
*****
gen bpl_final=_n
merge 1:1 bpl_final using "BPL_countries.dta"

```

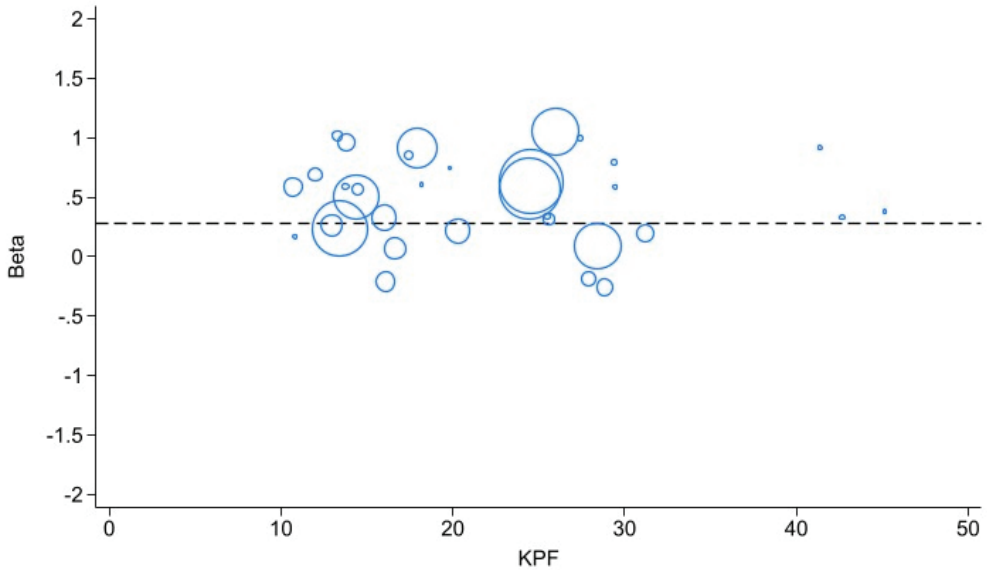
```
drop _merge
save "Rotemberg_results.dta", replace
```

한편, Stata 코드를 직접 작성하는 데 익숙하지 않은 연구자라면, Goldsmith-Pinkham et al.(2020)이 제공하는 `bartik_weight` 패키지를 내려받아 설치하여 더 간편하게 계산할 수도 있다. 앞서 제시된 계산 코드와 동일한 작업을 수행하는 `bartik_weight` 명령어의 예시는 다음과 같다. `y(soc_cap_res)`는 종속변수로 `soc_cap_res`라는 변수를 사용한다는 의미이며, `x(immigration_res)`는 내생성을 갖는 설명변수로 `immigration_res`를 사용하고, `z(share1960s*)`는 도구변수로 `share1960s`로 시작하는 국가별 1960년대 이민자 비중을 이용하는 것을 의미한다. `weightstub(g*)`는 충격(shock)변수로 `g*`, 즉 미국 전체에 있는 국가별 이민자 숫자를 사용한다는 의미이다. 코드에서 알 수 있듯이, 종속변수와 설명변수를 잔차화하는 과정은 패널데이터를 사용하는 경우, 혹은 통제변수 또는 고정효과 등을 모형에 넣고 싶은 경우 `bartik_weight` 명령어를 사용하기 전에 수행해야 한다.

```
*****
* Goldsmith-Pinkham et al.(2020)이 제공하는 bartik_weight
* 코드를 이용한 Rotemberg weight 계산 및 matrix로 저장
*****
bartik_weight, y(soc_cap_res) x(immigration_res) z(share1960s*) weightstub(g*)
mat A=r(alpha)
mat list A
```

로템버그 가중치를 계산한 후에는, 각 부문 비중을 개별 도구변수로 사용했을 때의 추정계수, F-통계량(Olea Montiel and Pflueger, 2013), 그리고 로템버그 가중치를 함께 보고하는 것이 일반적이다. 이러한 결과는 표의 형식으로 제시하거나(Goldsmith-Pinkham et al., 2020), [그림 3-1] 같은 형태로 시각화하여 나타낼 수 있다. [그림 3-1]은 Baak and Kim(2025)의 연구 결과를 시각화한 것으로, 이민이 사회적 자본에 미치는 인과효과를 분석한다. 해당 연구는 미국 지역사회조사(American Community Survey)와 Chetty et al.(2022)의 경제적 연결망(Economic Connectedness) 데이터를 결합하였다.

[그림 3-1] 로템버그 가중치 시각화 예시



자료: 저자 작성.

이 그림은 각 출신국가 그룹이 전체 인과효과에 얼마나 기여하는지를 보여주기 위해, 가로축에는 Kleibergen-Paap F-통계량(Kleibergen and Paap, 2006), 세로축에는 개별 추정계수(β), 그리고 각 원의 크기로는 로템버그 가중치를 표시한다. 전체 변이할당 도구변수를 이용한 최종 추정치는 가로 점선으로 표시하여 개별 추정치와의 차이를 한눈에 파악할 수 있도록 하였다. 만약 개별 추정치를 나타내는 원들이 이 점선으로부터 멀리 흩어져 있다면, 이는 각 이민자 그룹이 종속변수에 미치는 효과가 이질적(heterogeneous)임을 시사한다. Baak and Kim(2025)의 연구에서는 개별 충격을 이용한 경우와 변이할당 도구변수를 이용한 경우의 추정치의 차이가 크지 않게 나타난 것을 확인할 수 있다. 다음은 [그림 3-1]을 생성하는 Stata 코드로, 앞서 제시한 코드를 먼저 실행한 후 이어서 실행해야 한다.

```

*****
* Rotemberg weight과 국가별 비중을 도구변수로 이용한 결과를
* 그래프로 작성하는 코드
* Rotemberg weight을 직접 구하는 코드를 이용한 결과 값들을 바탕으로 작성
*****

quietly sum ab
local bg = r(sum)
disp "`bg'"
drop if KPF<10
scatter Beta KPF [w=abs_alpha] if alpha_hat1 >= 0, msymbol(Oh) || scatter Beta
KPF [w=abs_alpha] if alpha_hat1 < 0, msymbol(Dh) legend(order(1 "Positive
weights" 2 "Negative weights") pos(5) ring(0) size(small) region(fcolor(none)
lcolor(black) lwidth(thin))) yline(-1) xlabel(0(10)50, nogrid) ylabel(-10(2)10,
nogrid)

```

4. 변이할당 도구변수 - 외생적 충격을 이용한 설계

Borusyak et al.(2022)은 외생적 충격에 기반하여 변이할당 도구변수를 설계하고 인과효과를 식별하는 방법에 대한 이론적 근거와 실제 적용법을 제시했다. 역시 앞서 제시한 식 (2)의 단순 횡단면 회귀모형을 이용해 충격을 이용한 변이할당 도구변수 구축 및 식별 방법에 관해 설명하겠다.

$$y_i = \beta x_i + \epsilon_i. \tag{2}$$

여기서 설명변수는 기존의 식 (7)과 동일하게 K 부문의 가중평균 혹은 내적의 형태로 되어 있다. 그러나 비중의 경우 기준연도(분석기간의 첫 해 혹은 과거 연도) 값인 x_i 를 구축할 때 사용하는 것도 무방하다..

$$x_i = \sum_{k=1}^K s_{ik} g_k = \sum_{k=1}^K \frac{emp_{ik}}{emp_i} g_k \tag{7}$$

설명변수의 내생성 문제를 해결하기 위해 식 (17)과 같은 변이할당 도구변수를 구축한다.

$$z_i^{BHJ} = \sum_{k=1}^K s_{ik0} g_k^o \quad (\text{예} : \sum_{k=1}^K \frac{emp_{ik0}}{emp_{i0}} g_k^o), \tag{17}$$

앞서 살펴본 Goldsmith-Pinkham et al.(2020)의 방식과 달리, Borusyak et al.(2022)은 비중에 크게 구애받지 않고 분석기간의 기준연도 혹은 과거값을 가용하거나, 이미 설명변수에서 비중을 기준연도 값을 사용했다면(s_{ik0}), 설명변수와 동일하게 유지할 수 있다. 이로 인한 비중에 대한 내생성의 존재를 허용한 채, 기존의 충격 g_k 를 외생적인 충격 g_k^o 로 대체하는 도구변수를 제안한다. 여기서 새로운 충격 g_k^o 는 분석 대상 국가가 아닌 다른(other) 국가(들)의 k 부문 충격(의 평균)을 의미한다. 이는 분석 국가의 전국단위 충격 자체에도 내생성이 존재할 수 있다고 보고, 이를 더 외생적인 국가 외부의 충격으로 대체하는 접근법이다.

충격을 이용한 식별에서 변이할당 도구변수 z_i^{BHJ} 가 만족시켜야 하는 가정은 다음과 같다. 첫째, 연관성 가정이 성립해야 하며, 이는 아래의 식 (18)로 표현할 수 있다.

$$\mathbb{E}[\sum_i^n z_i^{BHJ} x_i] = \mathbb{E}[\sum_i^n \sum_k^K s_{ik0} g_k^o x_i] \neq 0. \quad (18)$$

직관적으로, 이는 도구변수와 내생성을 갖는 설명변수 간의 상관관계가 필요하다는 연관성 조건을 i 수준 변수 간의 횡단면 상관관계를 감안하여 일반화한 것이다. 이 수식의 의미를 다른 측면에서 살펴보기 위해, 충격수준에서의 비중 s_k 와 이러한 비중이 적용된 충격수준의 변수 \tilde{x}_k 를 아래와 같이 정의한다.

$$s_k = \sum_i^n s_{ik0} \quad \text{그리고 모든 } x \text{에 대하여 } \tilde{x}_k = \frac{\sum_i^n s_{ik0} x_i}{\sum_i^n s_{ik0}} = \sum_i^n \frac{s_{ik0}}{s_k} x_i. \quad (19)$$

여기서 새로운 변수 \tilde{x}_k 는 x_i 라는 변수를 각각의 가중치인 s_{ik0} 를 곱하여 모두 더하고, 이 값을 모든 가중치의 합으로 나눠준 것이다. 다시 말해, 이 식은 특정 그룹 k 에 대한 변수 x 의 가중평균을 계산한 것이며, 여기서 가중치는 각 데이터 값 x_i 가 평균 \tilde{x}_k 를 구하는데 얼마나 중요한지를 결정한다. 위의 두 수식을 바탕으로 식 (18)을 정리하면 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbb{E}[\sum_k^K g_k^o \sum_i^n s_{ik0} x_i] = \mathbb{E}[\sum_k^K g_k^o s_k \tilde{x}_k] \neq 0. \quad (20)$$

식 (20)의 가운데 항 $\mathbb{E}[\sum_k^K g_k^o s_k \tilde{x}_k]$ 는 연관성 가정을 k 수준, 즉 충격수준에서 표현한

것이라 할 수 있으며, 충격수준에서 g_k^o 가 \tilde{x}_k 와 상관관계가 있어야 한다는 가정이 된다, 즉 충격수준에서 g_k^o 가 도구변수로서 연관성 가정을 충족시켜야 하는 것이다.

둘째, 도구변수의 외생성 가정을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbb{E}[\sum_i^n z_i^{BHJ} \epsilon_i] = \mathbb{E}[\sum_i^n \sum_k^K s_{ik0} g_k^o \epsilon_i] = 0. \quad (21)$$

이 가정 역시 충격수준 변수들을 이용해 재정리하면 아래 식 (22)로 표현된다

$$\mathbb{E}[\sum_i^n z_i^{BHJ} \epsilon_i] = \mathbb{E}[\sum_i^n \sum_k^K s_{ik0} g_k^o \epsilon_i] = \mathbb{E}[\sum_k^K s_k g_k^o \tilde{\epsilon}_k] = 0. \quad (22)$$

마지막 등식을 통해, 도구변수의 외생성 가정은 결국 외생적 충격 g_k^o 가 충격수준 오차항 $\tilde{\epsilon}_k$ 와 상관관계가 없어야 한다는 조건으로 귀결된다. 즉, 새로운 충격변수인 g_k^o 가 도구변수로서 외생성 가정을 충족시켜야 하는 것이다.

위의 적률(moment) 조건을 보다 더 잘 이해하기 위해서는 다시 한번 (가상의) 충격 수준 회귀식을 생각해 볼 필요가 있다. 지금까지의 예시에서처럼 k 가 산업수준이라면, 이는 산업수준의 회귀분석이 될 것이며 아래의 수식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{y}_k = \beta \tilde{x}_k + \tilde{\epsilon}_k. \quad (23)$$

식 (23)에 외생 충격 g_k^o 를 도구변수로 사용한 추정량을 나타내면 식 (24)의 두 번째 항이 되고, 이에 몇 번의 대수 계산을 통해, 결국 변이할당 도구변수 z_i^{BHJ} 를 이용한 추정량과 동일함을 증명할 수 있다.

$$\tilde{\beta}_{IV} = \frac{\sum_{k=1}^K g_k^o \tilde{y}_k}{\sum_{k=1}^K g_k^o \tilde{x}_k} = \frac{\sum_{k=1}^K g_k^o \sum_i^n s_{ik0} y_i}{\sum_{k=1}^K g_k^o \sum_i^n s_{ik0} x_i} = \frac{\sum_i^n \sum_{k=1}^K s_{ik0} g_k^o y_i}{\sum_i^n \sum_{k=1}^K s_{ik0} g_k^o x_i} = \frac{\sum_i^n z_i^{BHJ} y_i}{\sum_i^n z_i^{BHJ} x_i}. \quad (24)$$

결론적으로, 가상의 충격수준 회귀식을 상정하고 g_k^o 를 도구변수로 사용한 추정량은, 기존의 i 수준 회귀분석에서 외생적 충격을 이용해 구축한 변이할당 도구변수 z_i^{BHJ} 를 사용한 추정량과 동일하다. 이를 산업수준의 예시를 통해 다시 설명하면 다음과 같다. 다

른 국가의 산업 k 의 고용변화율 g_k^o 가, 자국의 지역별 k 산업 비중으로 가중평균한 산업 수준의 오차항(그 중 임금증가율 y 에 대한 부분)과 상관관계가 없어야 한다는 것이다.

즉, Borusyak et al.(2022)의 충격을 기반으로 식별한 도구변수 추정량은 수학적으로 산업단위(shock-level)의 도구변수 추정량과 동등한 성격을 갖는다. 개별 지역단위의 데이터를 이용해 회귀분석을 수행하더라도, 적절한 가중치를 적용할 경우 이는 본질적으로 산업수준에서 도구변수법을 적용하는 것과 수치적으로 동일함을 증명한 것이라고 할 수 있다. 무역 충격(trade shock)을 예시로 적용하면, 변이할당 도구변수 설계는 지역간 비교가 아닌 산업간 비교의 문제로 환원된다. 뒤에 더 자세히 설명할 Autor et al.(2013)에서처럼 미국의 산업별 대중국 수입 증가(endogenous variable)에 대한 도구변수로 다른 선진국들의 산업별 대중국 수입 증가를 사용하는 형태와 같다. 즉, 미국 내의 지역적 특성과 무관하게(quasi-random), 다른 국가들에서 관측된 산업별 충격이 미국의 산업별 충격을 얼마나 잘 설명하는지가 식별의 핵심이 된다.

그렇다면 Borusyak et al.(2022)의 접근법은 Goldsmith-Pinkham et al.(2020)이 가정한 비중의 외생성을 어떻게 바라볼까? Borusyak et al.(2022)의 분석들은 비중이 외생적인 경우를 포괄하는 더 일반적인 접근법이라고 할 수 있다. 하지만, Borusyak et al.(2022)은 Goldsmith-Pinkham et al.(2020)의 외생적 비중 가정이 현실에서 충족되기 어려울 수 있다고 지적한다. 예를 들어, 특정 지역의 산업별 고용 비중은 해당 지역의 관측되지 않는 노동공급 특성(예: 특정 산업에 종사하는 신규 이민자의 숙련도)과 상관관계가 있을 수 있기 때문이다.

이에 Borusyak et al.(2022)는 비중의 외생성을 요구하는 대신, 외생적인 충격 g_k^o 이 활용 가능하며, 충격이 충분히 많은 부문으로 존재하고, 각 지역에 무작위에 가깝게(as-good-as-random) 독립적으로 할당된다는 보다 완화된 가정을 제시한다. 여기서 충분히 많은 수의 충격이란 일반적으로 분석단위인 지역의 수(n)에 상응하거나 그보다 많은 경우를 의미하며, 이러한 가정하에서 Borusyak et al.(2022)의 도구변수 추정량은 충격의 수 K 가 무한대로 가는 점근적(large K asymptotics) 특성하에서 일치추정량(consistent estimator)이 된다.

기술적으로 이는 지역수준의 데이터를 충격수준으로 재구조화한 뒤, 이 충격수준에서 도구변수 추정을 수행하는 것과 같다. 약한 도구변수 검정, 표준오차 계산 등 모든 절차 역시 이 재구조화된 데이터를 통해 이루어질 수 있으며, Borusyak et al.(2022)는 이를 위한 ssaggregate라는 Stata 코드를 제공한다. 강건성 검정, 식별 가정의 타당성 확보

를 위해 Borusyak et al.(2022)도 Goldsmith-Pinkham et al.(2020)과 비슷한 여러 방법을 제시한다. 균형성 검정, 평행 사전추세 검정 등이 그것인데, 다만 i 수준에서 이러한 검정을 수행할 뿐 아니라, 재구조화된 k 수준에서도 동일한 분석을 수행한다는 점에서 차이가 있다.

5. 외국 연구 적용 사례

이 절에서는 변이할당 도구변수가 적용된 기존 문헌의 연구 사례를 살펴보고자 한다. 먼저, 외생적 비중을 식별에 사용한 변이할당 도구변수 적용사례로 Tabellini(2020)의 이민 연구를 살펴보고, 외생적 충격을 식별에 사용한 변이할당 도구변수 사례로 Autor et al.(2013)을 설명한다.

Tabellini(2020)는 19세기 후반부터 20세기 초반까지 미국이 경험한 대규모 이민의 시대(Age of Mass Migration)를 대상으로, 이민이 미국의 지역경제와 사회에 미친 장기적 경제적·정치적 영향을 분석한 연구이다. Tabellini(2020)는 역사적 맥락에서 이민이 경제발전의 원동력이었음에도, 동시에 토착민(native-born)에게 경제적·사회적 비용을 초래했다는 이중적인 결과를 실증적으로 보여준다.

분석단위는 미국의 카운티(county)이며, 1850년부터 2010년까지 약 160년의 장기 데이터를 사용하였다. 데이터에는 인구센서스의 이민자 출신국별 인구 비중, 산업별 고용, 소득과 교육수준, 정치적 성향(정당투표율) 등이 포함되었다. 이러한 방대한 데이터를 결합함으로써, Tabellini는 한 세기에 걸친 이민의 누적적 효과를 계량적으로 추정할 수 있었다. 그러나 이민이 지역경제에 미치는 영향을 단순한 상관관계로 분석할 경우, 내생성(endogeneity) 문제가 발생할 수 있다. 예를 들어, 경제가 활발한 지역일수록 이민자가 몰릴 가능성이 높으므로, 이민 유입과 경제성장 사이의 단순한 양(+)의 관계는 인과관계를 반영하지 않을 수 있다.

이를 해결하기 위해 Tabellini(2020)는 외생적 변이를 식별 도구로 사용한 변이할당 도구변수를 사용한다. 1880년 시점에 각 카운티가 보유한 이민자 출신국별 비중(share)을 고정하고, 그 이후 시기(1910년대 이후)에 각 출신국별로 미국으로의 이민 증가율(shock)을 곱하여, 각 지역이 겪게 되는 외생적 이민충격(exogenous immigration shock)을 계산하였다. 즉, 1880년 시점의 고정된 이민자 구성비와 이후의 출신국별 변화(shock)를 결합하면, 이민 유입의 외생적 변이(exogenous variation)를 확보할 수 있게 된다고 설계하였다.

분석 결과, 단기적으로, 이민자 유입이 많았던 지역에서는 제조업 고용이 늘고 도시화가 가속화되는 등 경제활동이 활발해졌지만, 동시에 미국 토착민의 임금 하락과 고용 감소가 나타났다. 이민자와의 노동시장 경쟁으로 인해 토착민이 상대적으로 불리한 위치에 놓였으며, 일부 지역에서는 사회적 긴장과 정치적 반발이 관찰되었다. 그러나 장기적으로는 이민 유입이 많았던 지역이 그렇지 않은 지역보다 지속적인 경제성장을 보였다. 이러한 접근은 외생적 비중을 식별에 이용한 변이할당 도구변수 설계의 전형적 구조를 따르며, 역사적 사건을 활용해 비중의 외생성을 강화한 대표적 사례라고 할 수 있다.

Autor et al.(2013)은 2000년대 이후 급격히 증가한 중국발 수입 경쟁(import competition from China)이 미국 내 지역 노동시장(local labor markets)에 미친 영향을 실증적으로 분석한 연구이다. 저자들은 특히 제조업 고용 감소, 실업률 상승, 사회복지 수급 증가 등 부정적인 노동시장 효과에 주목하며, 무역충격의 지역간 불균형성을 강조한다.

Autor et al.(2013)의 분석은 미국의 통근권(Commuting Zone [CZ]) 단위에서 이루어졌으며, 1990년부터 2007년까지의 데이터를 활용하여, 지역별 산업구성과 산업별 중국 수입 증가 데이터를 결합하였다. 관심 설명변수에 내생성(endogeneity) 문제가 발생할 수 있다는 점을 고려해, 저자들은 변이할당 도구변수를 도입했다. 이 도구변수는 1990년 기준 각 지역의 산업별 고용 비중(share)을 고정하고, 이후 전국수준에서 관측된 산업별 중국 수입 증가(shock)를 미국이 아닌 다른 선진국의 값을 평균하여, 가중평균하여 계산한다.

이 식별 전략은, 중국의 다른 선진국으로의 수출 증가는 주로 중국 측 공급 요인에 기인하며, 미국 내 개별 지역의 경제성과와는 무관하다는 외생성 가정에 기반한다. 즉, 충격의 외생성을 기반으로 구축한 것으로, Borusyak et al.(2022)이 제시하는 외생적 충격을 기반으로 한 변이할당 도구변수라고 할 수 있다. 실제로 Borusyak et al.(2022)에서는 Autor et al.(2013)의 분석을 재현하면서, 본인들이 주장한 대로 데이터를 재구조화하여, 충격단위, 즉 산업단위로 2단계 추정을 수행한다. 이때 재구조화한 데이터를 이용한 분석에서 도구변수로는 중국이 얼마나 다른 선진국으로 수출을 증가시켰는가를 평균한 값을 사용하며, 이는 산업단위로 측정된 변수이다.

분석 결과, 중국 수입 증가에 더 많이 노출된 지역에서는 제조업 고용이 유의하게 감소하고, 전체 고용률이 하락하며 실업률이 상승한 것으로 나타났다. 저자들은 분석 결과들을 바탕으로, 무역자유화가 전체적으로는 효율성을 높일 수 있지만, 그 충격은 지역 및 계층간에 불균형적으로 분포할 수 있음을 지적한다. 이에 따라, 무역 피해 지역을 대

상으로 한 재분배 정책 및 지역 재적응 프로그램의 필요성을 강조한다. 이 논문은 이른바 중국충격(China Shock) 연구의 대표적 출발점이며, 무역-노동시장-지역경제를 연결하는 실증연구를 처음 수행한 논문 중 하나라고 볼 수 있다.

6. 국내 연구 적용 사례

이번 절에서는 변이할당 도구변수를 국내 사례에 적용한 대표적인 연구들을 살펴보고자 한다. 먼저 조희평·강동익(2022)은 Goldsmith-Pinkham et al.(2020)이 제시한 비중을 이용한 식별 전략을 한국 지방재정 분석에 적용하였다. 과거 외국인 거주지 분포가 현재 외국인 유입을 예측한다는 점을 활용하여 외국인 유입이 재정에 미치는 인과적 효과를 추정하였다.

외국인이 경제상황이나 재정여건이 더욱 양호한 지역에 선택적으로 더 많이 유입될 수 있는 내생성 문제를 해결하기 위해, Tabellini(2020) 혹은 Card(2009)와 같이 식별의 원천을 과거시점의 지역별·국적별 외국인 거주 비중(Initial Shares)의 외생성에서 찾는 접근법을 사용하였다고 볼 수 있다. 분석에는 행정안전부 “지방자치단체 외국인주민 현황”과 지방재정365의 세입 및 세출 결산 자료를 결합하여 전국 기초자치단체 단위의 분석을 수행하였다. 분석 시에는 Autor et al.(2013)가 사용한 것과 비슷한 장기차분(long difference)모형을 도입하였다. 설명변수는 2009년 인구 대비 2009~2018년 외국인 유입 증가분이며, 설명변수는 로그 세입(혹은 세출) 결산액의 차분값이다. 도구변수는 과거 기준연도 2007년의 이민자 비중을 사용하였다. 분석 결과, 외국인 유입은 기초자치단체의 총세입을 증가시키는 경향이 있었으나 통계적으로 유의하지는 않았으며, 총세출 역시 감소하지 않는 결과를 보였다.

반면, Kim(2024)는 한국의 로봇 도입이 지역 노동 수요에 미치는 영향을 분석한 연구로, Borusyak et al. (2022)의 변이할당 도구변수를 적용하여 충격의 외생성을 통해 인과효과를 식별한 대표적인 한국 사례라고 할 수 있다. 세계적으로 가장 높은 로봇 밀도를 보이는 한국을 대상으로 시군구단위 분석을 진행했으며, 분석기간은 2010년부터 2019년까지이다. 노동 수요의 직접적인 지표로 한국고용정보원의 워크넷(WorkNet) 신규 구인 인원(job vacancy) 데이터를 사용하였으며, 로봇 데이터는 국제로봇연맹(IFR)의 산업별 로봇 스톡 데이터를 활용하였다. 이 외에도 통제변수 구축을 위해 인구주택총조사의 고용 및 인구통계와 무역통계 등을 결합하였다.

Acemoglu and Restrepo(2020)을 바탕으로 지역별 로봇노출도를 지역 내 산업이

차지하는 비중에 해당 산업의 전국단위 로봇 도입 변화율을 곱하여 산출하고 주요 설명 변수로 사용하였다. 단순 최소자승법으로는 국내 산업별 로봇 충격에 대한 내생성 문제가 발생하므로, 한국과 산업구조 및 로봇 도입 추세가 유사한 싱가포르의 산업별 로봇 도입 변화를 도구변수의 외생적 충격(g_k^o)으로 활용하였다. Kim(2024)는 싱가포르의 산업별 로봇 도입 충격이 한국 지역 노동시장의 관측되지 않은 특성과 무관함을 입증하기 위해, Borusyak et al. (2022)이 제안한 산업 k 수준의 밸런스 테스트(balance test)를 수행하고 충격을 이용한 식별을 강화하였다. 분석 결과, 로봇 도입 확대가 전체 지역 노동 수요(구인)를 감소시킨다는 증거는 유의하지 않았지만, 산업 및 직무별 이질적 효과는 뚜렷하게 나타났다.

위의 두 편의 기존 연구 이외에도 한요셉(2023), 김준호(2025)를 비롯한 다수의 국내 연구에서 변이할당 도구변수가 활발하게 적용되고 있다.

7. 외생적 비중 vs. 외생적 충격

앞서 살펴본 바와 같이, 변이할당 도구변수는 외생적 비중을 가정하는 방식과 외생적 충격을 가정하는 방식으로 나눌 수 있다. 실증연구자는 두 접근법 중 어느 것을 사용해야 할지 결정해야 하며, 이때 고려할 몇 가지 사항을 아래에 요약했다.

첫째, 설명변수를 구성하는 비중이 해당 설명변수에 특화되었는지 확인해야 한다. 예를 들어 이민 관련 연구(Card, 2009; Tabellini, 2020 등)의 설명변수인 이민자 비율은 과거 특정 국가 출신 이민자의 거주 분포를 비중으로 사용한다. 이 비중은 설명변수와 매우 밀접하며, 과거의 분포가 유효한 식별력을 제공한다면 외생적 비중 접근법의 타당성이 높다. 반면 중국 무역충격 연구(Autor et al., 2013)의 비중인 지역 내 산업별 고용 비중은 중국발 충격뿐만 아니라 다른 무역충격이나 기술충격 등 여러 충격의 전파 경로가 될 수 있다. 이처럼 비중이 범용적(generic)일 경우에는 외생적 충격 접근법이 더 적절하며, 실제 Autor et al.(2013)도 이 방식을 택했다.

둘째, 부문의 수(K)가 충분히 큰지 점검할 필요가 있다. Borusyak et al.(2022)에 따르면, 외생적 충격 접근법은 충격수준으로 데이터를 재구조화하여 통계적 유의성을 판단한다. 만약 충격의 수가 작으면 K 가 무한대로 간다는 점근적(asymptotic) 가정이 성립하기 어려워 추정의 신뢰도가 낮아질 수 있다. 현실적으로도 K 의 수는 통제변수의 수를 넘어설 만큼 커야 하며, 작은 표본에서 발생할 수 있는 편의(finite sample bias) 문제도 감안해야 한다.

셋째, 비중의 외생성 가정이 현실적으로 타당한지 평가해야 한다. 외생적 충격 접근법은 비중의 내생성을 허용하는 반면, 외생적 비중 접근법은 비중의 외생성이 필수적이다. 따라서 과거 데이터를 활용하기 어렵거나 비중 자체가 시간에 따라 거의 변하지 않는 경직적(sticky) 특성을 보인다면 외생적 충격 접근법이 더 바람직하다. 또한, 비중의 외생성을 확보하기 위해 너무 먼 과거의 비중을 사용할 경우, 현재 설명변수와의 관련성이 약해져 약한 도구변수(weak instrument) 문제가 발생할 수 있다는 점도 반드시 고려해야 한다. 이를 바탕으로, 다음과 같이 생각해 볼만한 몇 가지 설계방법에 대한 질문을 제시하고 함께 생각해 보고자 한다.

[질문] 당신은 국내 여러 지역의 산업구조 데이터를 보유하고 있으며, 충격으로는 산업별 대미 수출 관세율 변화 $\Delta \tau_k^{US}$ 를 사용하려 한다. 이 관세충격은 산업 k 마다 다르게 발생하며, 국내 지역별 산업 및 노동시장과는 무관하게 외생적으로 결정된다고 가정한다. 결과변수는 지역 내 제조업 고용률 등을 고려할 수 있다. 다음의 GPSS와 BHJ 중 어떤 변이할당 도구변수 설계 접근이 보다 적절하며 그 이유는 무엇인가?

- 1) 외생적 비중을 이용한 식별 2) 외생적 충격을 이용한 식별

답: 2)

비중이 특화되어 있지 않고 범용적이기에 외생적 충격을 이용한 설계가 적절함.

1. 시뮬레이션 도구변수

외생적 충격기반의 변이할당 도구변수는 k 수준(예: 산업)의 외생적 충격을, 외생적이지 않을 수 있는 비중을 이용해 i 수준(예: 지역)으로 할당하는 방식으로 구축된 것이라 볼 수 있다. 즉, i 수준의 내생적 설명변수 x_i 에 대한 외생적 변이를 찾기 위해 다른 수준 k 의 외생적 충격을 활용해 연구를 설계하는 것이다. 이 때 k 수준의 충격을 i 수준으로 변환하기 위해 무작위적이지 않은(non-random) 비중을 가중치로 사용하는 특별한 경우(special case)이면서 가장 빈번히 사용되는 경우라 할 수 있다.

이처럼 k 수준의 외생적 충격을 i 에게 할당하되 가중평균의 형태를 취하지 않고 다른 형태로 일반화하여 도구변수를 구축하는 것도 가능하기 때문에, 여기에서는 그러한 도구변수들을 살펴본다. 그뿐만 아니라, 설명변수 x 역시 가중평균이 아닌 일반적인 형태로 확장하여 논의를 전개하려고 한다. 앞에서 살펴본 것과 같이 역시 식 (1)의 횡단면 단순회귀모형을 가정한다.

$$y_i = \beta x_i + \epsilon_i \quad (1)$$

여기서 x_i 는 어떠한 형태의 변수든 가능하며, 응용미시 실증연구에서 흔히 관심을 갖는 처치효과(treatment effect) 모형이라면 x_i 는 처치집단의 경우 1, 통제집단의 경우 0의 값을 갖는 더미변수(dummy variable)가 된다. 만약 처치가 k 지역의 정책 변화와 같은 외생적 충격에 의해 결정된다면, x_i 를 다음과 같이 재정의할 수 있다.

$$x_i = \mathbb{I}[w_i \in g_{k(i)}] \quad (25)$$

식 (25)는 특정 특성 w_i 를 가진 관측치 i 가, 자신이 거주하는 지역 $k(i)$ 에서 해당 특성이 처치 조건 $g_{k(i)}$ 에 부합하여 처치 자격이 부여(eligible)되는 상황으로 해석할 수 있다. 여기에서는 설명의 편의를 위해, 이처럼 처치 자격이 부여되는 것(eligibility) 자체를 처치(treatment)로 간주한다.

여기서 주목해야 할 점은 정책 변화 g_k 자체가 외생적이더라도 개인의 처치 여부 x_i

가 꼭 외생적이지는 않다는 점이다. 즉, 개인 i 의 (관측된 혹은 관측되지 않은)특성은 정책 g_k 에 영향을 주지 않더라도, 개인이 k 지역을 선택(sorting)하는 과정에서 x_i 의 내생성이 발생할 수 있다. 따라서, 결과변수 y 를 x 에 대해 단순 회귀분석하면, 편의가 발생하고 인과효과를 추정 및 식별할 수 없다. 이러한 편의는 외생적 충격이 각 관측단위 i 에 무작위적으로 할당되지 않기 때문에 생기는 것으로, 이와 같은 내생성을 해결하는 것이 시뮬레이션 도구변수(simulated instrument)의 핵심이다(Borusyak and Hull, 2023).

시뮬레이션 도구변수는 관측단위의 내생적 선택을 배제하기 위해 인위적으로 무작위적인 변이를 생성하는 방식으로 구축된다. 이는 각 관측단위가 하나의 상위집단에만 소속될 때 적용된다는 점에서 변이할당 도구변수와 구조적 차이가 있다. 즉, 변이할당 도구변수에서는 하나의 지역 i 가 여러 산업에 동시에 노출되지만, 시뮬레이션 도구변수에서는 i 가 개인이라면, k 는 주(state), 시(city), 군(county)과 같은 지역단위로서, 하나의 개인은 오직 하나의 k 에만 속한다.

앞서 언급한 예시처럼 처치가 지역단위로 이루어지는 경우, 시뮬레이션 도구변수는 다음과 같은 방법으로 구축할 수 있다. 먼저 데이터에서 전국단위 대표성 있는 표본(nationally representative sample) $j = 1, \dots, J$ 을 무작위로 추출(draw)한다. 이 전국단위 표본의 각 개인이 i 가 거주하는 지역 $k(i)$ 에 거주한다고 가정하고, 처치를 받게 될 예상 처치 비율을 계산하여 시뮬레이션 도구변수 z_i^{SIM} 로 사용한다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$z_i^{SIM} = f(g_{k(i)}) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \mathbb{I}[w_j \in g_{k(i)}]. \quad (26)$$

다만 이 방법이 성립하기 위한 조건은, 연구자가 각 지역 k 에서 처치가 행해지는, 혹은 처치 자격이 주어지는 규칙(공식)을 사전에 정확히 알고 있어야 한다는 점이다.

시뮬레이션 도구변수의 대표적인 예시로 Currie and Gruber(1996)는 미국 저소득층 의료지원 제도인 메디케이드(Medicaid)의 자격 확대가 임산부 및 아동 건강 지표에 미친 인과적 영향을 분석하였다. 메디케이드 자격 확대는 주(state)별로 다르게 진행되었고, 개인 i 의 관측되지 않은 특성이 특정 주를 선택하게 만들어 메디케이드 자격을 얻게 되고, 이러한 특성은 결과변수에도 영향을 미칠 수 있다. 이러한 내생성을 제거하기 위해 주(state) 정책 또는 제도적 특성만을 반영하여 메디케이드 부여 자격을 시뮬레이

선하고, 이를 처치변수 x 에 대한 도구변수로 활용하였다.

구체적인 시뮬레이션 과정은 다음과 같다. 먼저, 분석 대상인 각 개인 i 와 동일한 연령대에 속하는 전국 대표 표본 $j = 1, \dots, J$ 를 데이터에서 무작위로 추출한다. 그다음, 이 대표 표본이 모두 i 가 거주하는 주 $k(i)$ 에 거주한다고 가정한다. 그리고 해당 주 $k(i)$ 의 정책에 따라 이 가상 표본 중 메디케이드 수혜 자격을 갖게 될 비율을 아래 식 (27)과 같이 계산한다.

$$z_{k(i)}^{SIM} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \mathbb{I}[\text{individual } j \text{ is eligible if they live in state } k] \quad (27)$$

이러한 시뮬레이션 도구변수는 주 단위의 정책 변화(충격)만을 변이(variation)의 원천으로 삼기 때문에, 개인의 내생적 선택 문제를 해결하고 외생성을 확보하는 장점이 있다. 따라서 지역별로 상이한 정책의 효과를 분석할 때(예: 미국의 푸드 스탬프[food stamp] 정책, 한국의 출산장려금 정책 등) 매우 유용하게 적용될 수 있다. 다만 이러한 시뮬레이션 도구변수는 오직 상위단위인 k 수준의 변이만을 이용하여 인과효과를 식별하기 때문에, 개인 수준의 다양한 변동성을 반영하지 못하며, 그 결과로 1단계 회귀식에서의 설명력이 약한 문제가 생길 가능성이 높다. 특히 표본 크기가 작거나, 지역간 정책 차이가 미미할 경우, 1단계 회귀분석의 F -통계량이 유의하지 않게 나타나 추정의 신뢰도가 떨어질 가능성이 크다.

실제 연구에서 시뮬레이션 도구변수를 구축하는 다른 장점은 과식별 검정(overidentification test)을 이용할 수 있다는 점이라고 할 수 있다. 시뮬레이션 도구변수는 상대적으로 데이터의 제약 없이 구축할 수 있으나, 변이가 단조로우므로 약한 도구변수가 될 가능성이 있다. 다만, 외생성이 있다는 것을 주장하기가 상대적으로 쉽다는 점에 착안하여, 추가적인 (잠재)도구변수가 존재한다면, 그 도구변수와 시뮬레이션 도구변수를 함께 사용하여 분석을 할 수 있을 것이다. 이 경우 관심 설명변수 1개에 도구변수가 2개 이상 사용되는 과식별(over-identification)모형이 형성되며 과식별 검정을 통해 추가된 도구변수가 외생성을 갖는지 체크해 볼 수 있다.

과식별 검정의 숨은 가정은, 도구변수 중(어떤 것인지는 모르지만) 최소한 한 개가 외생성을 갖는다는 전제하에 사용된 도구변수가 모두 외생적인 것인지를 테스트하는 것이라는 점에 주목해 보자. 시뮬레이션 도구변수가 외생성을 갖는다고 강하게 추측된다면, 시뮬레이션 도구변수와 추가된 다른 도구변수를 사용한 모형에서의 과식별 검정은 사실상 추가된 도구변수의 외생성을 테스트하는 것이 될 것이다.

2. 재중심화 도구변수

Borusyak and Hull(2023)은 외생적 충격을 관측단위에 할당하는 기존 도구변수를 보다 일반화하고, 외생성을 확보하려는 방법으로 재중심화 도구변수(recentered instrument)를 제안했다. 이 도구변수의 구축방법을 알아보기 위해, 앞서 제시된 식 (1)의 단순회귀모형을 통해 살펴보겠다.

$$y_i = \beta x_i + \epsilon_i. \quad (1)$$

여기서 연구자의 관심 변수인 x_i 는 처치변수라고도 할 수 있으며, 이에 도구변수로 사용을 고려할만한 변수 z_i 가 존재한다고 가정하자. 이 잠재적 도구변수 z_i 는 두 가지 요소로 구성된다. 첫째는 외생적 충격 g_1, \dots, g_K , $n \neq K$ 로, 이는 분석단위 i 와는 다른 수준 k 에서 결정되는 변수이다. 둘째는, 이 외생적 충격이 각 관측단위 i 에 할당(assignment) 혹은 노출(exposure)되는 과정에 작용하는 변수 w 로 사전적으로 결정된 변수(pre-determined variable)이다. 이를 바탕으로 잠재적 도구변수 z_i 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$z_i = h_i(g, w). \quad (28)$$

여기서 $h_i(\cdot, \cdot)$ 은 알려진(known) 함수이다. 만약 $h_i(\cdot, \cdot)$ 가 가중평균의 형태라면 z_i 는 변이할당 도구변수의 형태를 가진다. 다만 z_i 가 가중평균의 형태를 가진다 하더라도, x_i 가 가중평균의 형태가 아니라면, 전형적인 변이할당 도구변수의 사례와는 다른, 조금 일반화된 경우에 해당한다(예: Abayasekhara, Kim, and Wang, 2025).

Borusyak and Hull(2023)에 의하면 z_i 의 외생성을 확보하기 위해서는 다음 두 가지 가정이 추가로 필요하다. 첫째는 충격의 외생성으로, 충격 g 와 오차항 ϵ 이 서로 독립이거나, 혹은 w 가 주어진 상황에서 조건부 독립이어야 한다. 둘째로는, g 의 데이터 생성 과정(data generating process, DGP)을 연구자가 정확히 알고 있어야 한다. 두 번째 가정은 재중심화 도구변수 적용에 제약을 가져오는 강한 가정이긴 하지만, g 가 일반적 균등분포(uniform distribution)를 따르거나, 무작위실험처럼 연구자가 무작위 할당 프로토콜(randomized protocol)을 직접 설계하거나 알고 있는 경우 등에서는 충족될 수 있는 가정이다.

위 두 가지 가정이 충족된다면, 잠재적 도구변수 z_i 를 다음과 같이 재중심화

(recentering)하여 외생성을 확보할 수 있다. 먼저 재중심화하기 전에는 z_i 가 외생성을 만족시키지 않는다고 다음과 같이 가정한다.

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_i z_i \epsilon_i\right] \neq 0. \quad (29)$$

그리고, 잠재적 도구변수 z_i 의 조건부 기댓값 μ_i 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mu_i = \mathbb{E}[z_i \mid w] = \mathbb{E}[h_i(g, w) \mid w]. \quad (30)$$

이를 앞서 살펴본 식 (29)와 결합하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_i z_i \epsilon_i\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_i \mu_i \epsilon_i\right]. \quad (31)$$

위 식의 우변을 좌변으로 옮겨 정리하면 최종적으로 다음 식을 도출할 수 있다.

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_i (z_i - \mu_i)\epsilon_i\right] = 0. \quad (32)$$

이제 $\tilde{z}_i = z_i - \mu_i$ 라고 새로운 도구변수를 정의하면, 식 (32)에 의해 이 새로운 도구변수는 외생성 가정을 만족한다. 새로운 도구변수 \tilde{z}_i 는 잠재적 도구변수 z_i 에서 그 조건부 기댓값을 빼서 중심을 조정했기 때문에, 재중심화(recentering) 과정을 거치는 것이라 할 수 있고, 재중심화 도구변수(recentered instrument)라 부른다(Borusyak and Hull, 2023).

실제로 재중심화 도구변수를 적용함에 있어서 주의할 점은 조건부 기댓값 μ_i 를 추정해야 한다는 것이다. 이를 위해서는 앞서 설명한 두 번째 가정, 즉 외생적 충격 g 의 데이터 생성 과정을 알고 있어야 한다는 조건이 필요하다. 식(30)의 가장 오른쪽 항을 이용하여 μ_i 를 계산하는데, 이때 기댓값은 g 의 데이터 생성 과정을 바탕으로 추정된다. 예를 들어, g 의 데이터 생성 과정이 균등분포를 따른다면, 관측된 g 값들의 모든 가능한 순열(permutation)에 대해 h_i 를 각각 계산한 후, 그 값들의 단순평균을 구해 μ_i 를 추정할 수 있다. 이 때 기댓값은 w 에 대한 조건부 기댓값이므로 w 의 데이터 생성 과정은 알고 있지 않아도 무방하다.

Borusyak and Hull(2023)은 재증심화 도구변수의 적용 사례로 지역 i 의 시장 접근성(market access)이 고용에 미치는 영향을 분석했다. 본고에서는 논의의 편의를 위해 이 예시를 일부 단순화하여 살펴본다.

$$\Delta y_i = \beta \Delta \log MA_i + \epsilon_i. \quad (33)$$

위의 식 (33)에서 y_i 는 지역 고용(employment)이고, MA_i 는 지역 i 의 시장 접근성을 의미하며, 이는 다음과 같이 정의된다.

$$MA_{it} = \sum_{j=1}^N \frac{Pop_j}{Travel\ Time(loc_i, loc_j, g_t)}. \quad (34)$$

여기서 시장 접근성을 구성하는 변수들은 다음과 같다. 외생적 충격 g_t 는 t 년도 초고속열차(high speed railway) 네트워크를 뜻한다. 이를 조금 더 엄밀히 외생성을 나타내는 변수로 표현하면, 초고속열차 네트워크 중 t 년도까지 건설되어야 했던 구간의 완공 여부를 반영한 변수라고 할 수 있다. 분자의 Pop_j 는 j 지역의 기준연도 인구, $Travel\ Time(loc_i, loc_j, g)$ 은 초고속열차 네트워크가 g 로 주어졌을 때, i 지역과 j 지역 간의 이동시간을 의미한다.

해당 연구는 340개의 중국 도시와 2007년부터 2016년까지 건설 예정이었던 149개의 초고속열차 구간(기개통구간 83개, 미개통구간 66개) 데이터를 바탕으로 재증심화 도구변수를 구축했다. 연구 설계에 있어 핵심 식별 가정은 다음과 같다. i 지역과 k 지역을 잇는 초고속열차 구간의 건설 계획이 세워지는 것은 무작위적이거나 외생적이지 않아서 내생적일 수 있다. 즉, 지역의 인구가 많다면 건설 가능성이 높지만, 인구가 적다면 건설 가능성은 낮을 것이다. 그러나, 일단 건설 계획이 수립된 이후, 예정된 시기 내에 실제 완공이 되는지 여부는 예측불가능한 요인에 의해 결정되는, 무작위에 가까운(as-good-as-random) 외생적 충격이라고 가정하는 것이다.

[그림 3-2] 시장접근성과 중국 고속철도 노선망 건설현황

A. Completed Lines and MA Growth

B. All Planned Lines

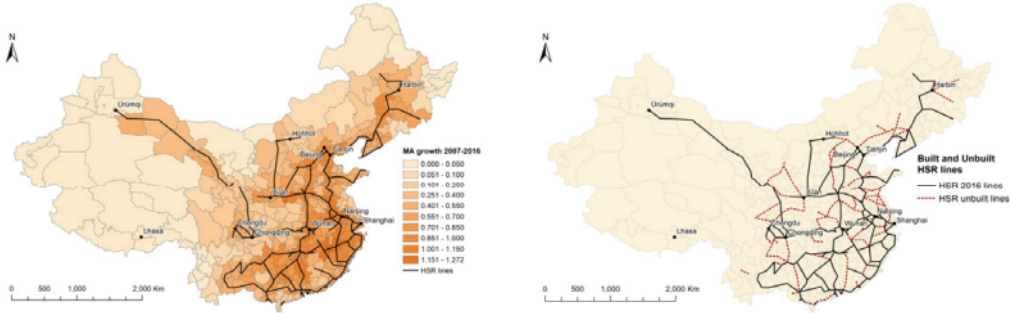


FIGURE 1.—Chinese High Speed Rail and Market Access Growth, 2007–2016. *Note:* Panel A shows the completed China high-speed rail network by the end of 2016, with shading indicating MA growth (i.e., log-change in MA) relative to 2007. Panel B shows the network of all HSR lines, including those planned but not yet completed as of 2016.

자료: Borusyak and Hull(2023) Figure 1, p.2172.

[그림 3-3] 재중심화 시장접근성

A. Expected Market Access Growth

B. Recentered Market Access Growth

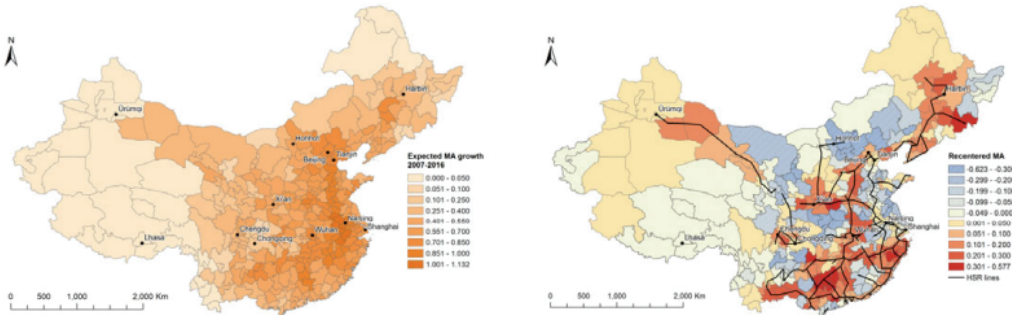


FIGURE 2.—Expected and Recentered Market Access Growth from Chinese HSR. *Note:* Panel A shows the variation in expected 2007–2016 MA growth across Chinese prefectures, computed from 1999 HSR counterfactuals that permute the opening status of built and unbuilt lines with the same number of cross-prefecture links. Panel B plots the variation in corresponding recentered MA growth: the difference between the MA growth shown in Panel A of Figure 1 and expected MA growth. The HSR network as of 2016 is also shown in this panel.

자료: Borusyak and Hull(2023) Figure 2, p.2174.

재중심화 도구변수를 구축하기 위해 다음과 같은 시뮬레이션을 수행했다. 먼저 건설 예정이었던 149개의 초고속열차 구간 중 실제 개통된 83개 구간이 어떤 것이 될지를 무

작위 순열(random permutation)을 통해 반복적으로 다시 뽑는다. 그다음 각 순열 π 에 해당되는 가상의 초고속열차 네트워크 g_π 마다 $TravelTime(loc_i, loc_j, g_\pi)$ 을 재계산한 후, 시장 접근성을 측정하고, 이 값들의 평균을 내어 시장 접근성의 조건부 기댓값을 구했다. 마지막으로, 실제 시장접근성 MA_{ii} 에서 이 조건부 기댓값을 차감해 주어 최종적인 재중심화 도구변수를 구축하였다.

[그림 3-2]와 [그림 3-3]은 이러한 재중심화 과정을 시각적으로 보여준다. [그림 3-2]의 A패널은 2016년까지 실제 완공된 초고속열차 노선과, 그로 인해 발생한 실제 시장 접근성 성장률을 보여주며, 이는 내생성을 포함하고 있는 분석 대상 설명변수이다. B패널은 건설 예정인 모든 열차 노선과 완공 여부를 보여준다. [그림 3-3]의 A패널은 위에서 설명한 순열 시뮬레이션을 통해 계산된 시장 접근성 성장률의 조건부 기댓값을 나타낸다. [그림 3-3]의 B패널은 실제 성장률에서 그 조건부 기댓값을 차감하여, 최종적으로 완성된 재중심화 도구변수를 보여준다. 이는 계획의 내생성을 통제하고 남은 시장 접근성의 성장효과, 즉 외생적 변이만을 나타낸다고 할 수 있다.

이 적용사례에서 주목할 점은 재중심화 도구변수를 구축할 때 잠재적 도구변수를 먼저 제안한 후, 그 기댓값을 계산하여 차감해 준 것이 아니라, 내생적 설명변수 MA_{ii} 에서 직접 그 기댓값을 차감하여 재중심화 도구변수를 완성했다는 점이다. 이처럼 재중심화 과정은 잠재적 도구변수가 외생성을 만족시키지 못한다고 여겨질 때뿐 아니라, 설명변수 자체의 내생성을 제거하여 도구변수를 구축할 때도 유용하게 사용될 수 있다.

마지막으로 시뮬레이션 도구변수와 재중심화 도구변수의 유사점 혹은 차이점 또한 생각해 볼 필요가 있다. 시뮬레이션 도구변수는 관심 설명변수가 i 에 특정된 내생성을 가지고 있다는 데에 착안하여, i 와 관계없는 외생적 변이를 만들어 내는 것이라고 할 수 있다. 반면, 재중심화 도구변수는 관심 설명변수에 존재하는 i 에 따른 변화 중, 오차항과 연관성이 있을 수 있는 변이를 제거하기 위해 시뮬레이션 절차를 통해 평균을 구해 차분하는 것이라 볼 수 있을 것이다.

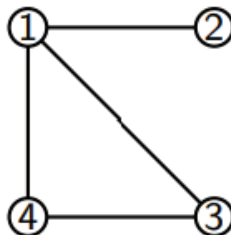
1. 평균 선형 네트워크 모형

이번 절에서는 네트워크 모형, 특히 소셜 네트워크 등을 통해 발생하는 동료 효과(peer effects) 등의 추정 시 사용하는 평균 선형 네트워크 모형(linear-in-means network model)을 살펴본다. 또한, 이 모형을 추정할 때 발생하는 내생성 문제와 도구변수 설계에 대해 논의한다.

먼저 분석의 대상이 되는 네트워크를 수학적으로 정의하면 다음과 같다. 데이터에는 $i = 1, \dots, n$ 의 개인 또는 노드(node)가 존재하고, 이들의 관계를 나타내는 네트워크를 A 라고 한다. 이 네트워크 A 는 $n \times n$ 크기의 인접 행렬(adjacency matrix)로 표현되며, 만약 i 와 k 가 네트워크에서 연결되어 있다면 i 행 k 열 성분 a_{ik} 는 1의 값을 갖고, 연결되어 있지 않다면 0의 값을 갖는다. 링크(link) 혹은 엣지(edge)라고 부르는 두 사람 간의 연결 여부는 상호 대칭적(symmetric)이며 방향성은 없는 경우(undirected)를 본 연구에서는 가정한다. 이는 방향성이 있는 네트워크로 일반화될 수 있지만, 많은 경제학 연구에서 보편적으로 사용되는 가정이다(예: Banerjee et al., 2013). 아래 식 (35)의 인접행렬 A 는 4명의 개인에 관한 [그림 3-4]와 같은 네트워크를 행렬로 표현한 것이다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

[그림 3-4] 간단한 네트워크 예시



자료: 저자 작성

동료효과 연구에서는 일반적으로 각 행의 합이 1이 되도록 행 정규화한 (row-normalized) 인접행렬 W 를 사용한다. 이는 각 행의 모든 성분을 해당 행의 합 (즉, 각 개인의 친구 수)으로 나누어주는 방식으로 계산된다. 즉, $w_{ik} = 1/\sum_k a_{ik}$ 의 값을 가지며 앞서 제시된 행렬 A 를 행 정규화하면 다음과 같다.

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

이러한 네트워크를 바탕으로 다음과 같은 평균 선형 네트워크 모형을 정의할 수 있다 (Manski, 1993).

$$y_i = \beta_1 \sum_k w_{ik} y_k + \beta_2 x_i + \beta_3 \sum_k w_{ik} x_k + \epsilon_i. \quad (37)$$

위 모형은 개인 i 의 결과변수 y_i 가 i 의 네트워크 이웃(혹은 친구)의 결과변수 평균 $\sum_k w_{ik} y_k$ 에 어떻게 영향을 받는지를 보여준다. 그러나 k 역시 친구 평균 결과에 영향을 받으므로, 식 (37)을 k 의 결과변수에 대해서도 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$y_k = \beta_1 \sum_l w_{kl} y_l + \beta_2 x_k + \beta_3 \sum_l w_{kl} x_l + \epsilon_k, \quad (38)$$

만약 i 와 k 가 친구라면($w_{ik} = w_{ki} \neq 0$) y_i 와 y_k 는 서로 동시에 영향을 주고 받으며, 일반적인 최소자승법으로는 i 가 k 에게 영향을 주는 것인지, 혹은 그 반대인지를 식별할 수 없는 반영 문제(reflection problem)에 직면하게 된다(Manski, 1993). 따라서 도구 변수 설계와 같은 인과추정 기법을 고려해야 할 것이다.

2. 네트워크 파급효과 분석을 위한 도구변수 설계

네트워크 모형에서의 활용 가능한 도구변수를 논의하기에 앞서, 평균 선형모형의 특수한 경우를 먼저 살펴보려고 한다. 이는 동료효과가 존재하지 않고($\beta_1 = 0$), 행 정규화된 인접행렬 W 가 아닌 A 를 사용하는 사례이다.

$$y_i = \beta_2 x_i + \beta_3 \sum_k a_{ik} x_k + \epsilon_i. \quad (39)$$

식 (39)에서 x_i 를 i 의 처치 상태라고 한다면, β_2 는 처치의 직접효과, β_3 는 i 의 친구 중 처치 받은 사람의 수가 종속변수에 미치는 영향, 즉 처치의 파급효과(spillover effects of treatment)를 나타낸다.

Miguel and Kremer(2004)는 케냐 학생들에게 구충제(deworming drug)를 무상 제공하는 무작위대조군실험(randomized controlled trial)을 통해, 이로 인한 건강 개선이 교육 성과에 미치는 영향을 분석했다. 특히, 구충제를 받은 것(처치)이 학생 본인의 교육 성과에 미치는 영향 뿐 아니라, 주변 친구들의 처치 여부가 개인의 교육 성과에 미치는 파급효과에 주목했다. 언뜻 생각하면, 무작위대조군실험으로 연구를 설계하였으므로, 간단한 최소자승법 추정에 의해 파급효과를 인과적으로 추정할 수 있을 것 같지만, 다음과 같은 이유로 꼭 그렇지만은 않다. 거주지의 인구밀도에 따라 학생들의 친구수가 달라지며, 이는 구충제를 받은 친구수 $\sum_k a_{ik} x_k$ 에 영향을 미친다. 만약 인구밀도가 높은 지역(도시 지역) 학생들의 교육 성과가 체계적으로 더 높을 가능성이 있다면, 친구수와 오차항 간의 상관관계로 인한 편의(bias)가 발생한다.

만약 완전한 무작위대조군실험이 시행되었다면(예: 모든 학생들 중 무작위로 30%의 학생들에게 구충제 무상제공), 각 개인 i 의 친구 총수를 통제변수로 포함하여 편의를 막을 수 있다. 처치 비율이 0.3일 때, 구충제를 받은 친구 숫자의 기댓값은 다음과 같이 나타낼 것이다:

$$\mathbb{E}[\sum_k a_{ik} x_k] = \mathbb{E}[0.3 \sum_k a_{ik}]. \quad (40)$$

그리고 도구변수를 다음과 같이 정의하면 $\tilde{z}_i = \sum_k a_{ik} (x_k - 0.3)$, 이 도구변수와 오차항 ϵ_i 와의 공분산은 0이 되며, 다음과 같이 외생성이 만족된다.

$$\mathbb{E}[\sum_k a_{ik} (x_k - 0.3) \epsilon_i] = 0. \quad (41)$$

이는 앞선 절에서 살펴본 재중심화 도구변수(recentered instrument)와 동일한 설계 원리로 구축된 도구변수이다.

식(39)의 내생적 설명변수 $\sum_k a_{ik} x_k$ 는 전통적 변이할당 도구변수 모형에서의 설명변수처럼 내적(inner product)의 형태를 가지고 있다. 다만 차이점이 있다면, k , 즉 충격의 수준이 i 와 같은 개인단위라는 점이다. 그리고 사용된 도구변수는 비중이나 충격을 바꾸는 변이할당 도구변수가 아닌 재중심화 과정만을 거쳤다. 참고로, 만약 행 정규화한 인접행렬 W 를 사용한 모형이었다면, 설명변수 $\sum_k w_{ik} x_k$ 는 정확히 가중평균의 형태를 가지고 있으며, 이는 친구의 숫자와 관계없이 처치 받은(구충제를 받은) 친구의 비율을 의미하게 된다. 이 경우, 처치확률이 0.3이라면, 친구수와 관계없이 설명변수의 기댓값은 0.3일 것이고 $\mathbb{E}[(\sum_k w_{ik} x_k) \epsilon_i]$ 는 0이 되어, 별도의 도구변수 없이 최소자승법으로도 인과효과 식별 및 추정이 가능하다.

3. 동료효과 분석을 위한 도구변수 구축

이제 평균 선형모형의 일반적인 경우를 식(42)를 통해 살펴보려고 한다.

$$y_i = \beta_1 \sum_k w_{ik} y_k + \beta_2 x_i + \beta_3 \sum_k w_{ik} x_k + \epsilon_i. \quad (42)$$

식(42)의 핵심은 동료효과를 나타내는 모수 β_1 이며, 위 식을 행렬 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$y = \beta_1 W y + X \beta_2 + W X \beta_3 + \epsilon. \quad (43)$$

$y: n \times 1$, $X: n \times M$, $\epsilon: n \times 1$, $W: n \times n$ 행렬.

우변의 첫 항을 좌변으로 옮겨 산술적 변환을 거치면 다음과 같은 축약형(reduced-form) 모형을 도출할 수 있다.

$$(I - \beta_1 W) y = X \beta_2 + W X \beta_3 + \epsilon. \quad (44)$$

만약, $0 < \beta_1 < 1$ 이라는 조건이 충족되면, Bramoullé et al.(2009)의 결과에 따라 식(44)을 다음과 같이 무한급수 형태로 확장할 수 있다.

$$\begin{aligned} y &= (I - \beta_1 W)^{-1} X\beta_2 + (I - \beta_1 W)^{-1} WX\beta_3 + (I - \beta_1 W)^{-1} \epsilon \\ &= X\beta_2 + (\beta_2\beta_1 + \beta_3) \sum_{j=0}^{\infty} \beta_1^j W^{j+1} X + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_1^j W^j \epsilon. \end{aligned} \quad (45)$$

앞서 설명한 것과 같이 반영 문제(reflection problem)로 인한 내생성이 존재하므로 Wy 에 대한 도구변수가 필요하다. 식(45)의 양변에 행 정규화 인접행렬 W 를 곱하면, 다음과 같은 식(46)을 도출할 수 있다.

$$Wy = WX\beta_2 + (\beta_2\beta_1 + \beta_3) \sum_{j=0}^{\infty} \beta_1^j W^{j+2} X + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_1^j W^{j+1} \epsilon. \quad (46)$$

식(46)를 자세히 살펴보면, 좌변은 식(43)에서 연구자가 관심 있는 내생적 설명변수 Wy 이며, 이는 우변의 $W^{j+2}X$ 의 함수로 나타난다. 따라서, 만약 $\beta_2\beta_1 + \beta_3 \neq 0$ 이고, I, W, W^2 가 선형독립(linearly independent)이면, Wy 에 대한 도구변수로 $W^2 X$ 를 사용 가능하다는 것을 알 수 있다(Bramoullé et al., 2009). 이 조건은 W 가 아주 특별한 형태가 아닌 일반적인 소셜 네트워크 형태이면 충족된다. 즉, 모든 개인이 다른 모든 개인과 연결되는 완전(complete) 네트워크 등과 같은 경우가 아니라면 충족된다.

도구변수로 사용되는 $W^2 X$ 는 “친구의 친구”의 외생적 특성을 가중평균 한 값이다. 즉, 나에게 직접 연결되지는 않았지만, 내 친구를 통해 간접적으로 연결된 사람들의 특성을 도구변수로 사용하는 것이다. 친구의 친구 중 내 친구인 사람도 포함되지만 그들의 특성은 식(42)의 우변 세 번째 항에서 통제되어 있다. 이론적으로는 0보다 큰 모든 j 에 대해 $W^{j+2}X$ 를 도구변수로 사용 가능하므로, $W^3 X, W^4 X$ 등도 유효한 도구변수가 될 수 있다. 또한 설명변수 x 가 m 개 있다면 산술적으로 $m(n-2)$ 개의 도구변수를 만들 수 있다. 다만, 도구변수를 너무 많이 사용하는 경우 일반적으로 1단계 추정에서의 F -통계량이 작아질 수 있다는 점은 주의해야 한다. 또한, $0 < \beta_1 < 1$ 이므로, j 가 커질수록 해당 도구변수는 Wy 와 연관성이 낮을 가능성이 높다. 직관적으로, 2단계 친구(친구의 친구)의 특성보다 3단계 친구(친구의 친구의 친구)의 특성이, 내 친구의 결과변수 평균을 설명할 가능성이 낮기 때문이다.

4. 동료효과 분석 적용 사례

Hahn, Kim, and Yang(2023)에서는 Banerjee et al.(2013)의 Social Networks and Microfinance 데이터를 이용, 사회적 네트워크 내의 이웃(친구, 친척 등)의 근로 여부가 개인의 근로 결정에 미치는 동료효과(peer effects)를 분석했다. 본고에서는 해당연구의 여러 분석 중, 앞서 소개한 평균 선형모형의 결과에 초점을 맞추어 간단히 살펴보고자 한다.²⁾

또한, Hahn et al.(2023)은 동료효과가 네트워크의 종류(예: 친구, 친척, 대출 그룹 등)에 따라 이질적으로 나타나는지에도 주목했으며, 이에 따라 네트워크별로 개별적인 분석을 수행했다.

$$y_i = \beta_1 \sum_k w_{ik}^{(s)} y_k + \beta_2 x_i + \beta_3 \sum_k w_{ik}^{(s)} x_k + h_{village} + \epsilon_i \quad (47)$$

- y_i : 노동 관련 결과변수(근로 여부, 근로지역 등)
- $w_{ik}^{(s)}$: $i-k$ 가 네트워크 s 에서 연결되어 있는지(행 정규화 인접행렬 이용)
- x_i : 나이, 교육수준 등의 통제변수
- $h_{village}$: 마을 고정효과

여기서 동료효과를 나타내는 모수 β_1 은 i 의 친구 중 일하는 사람 비율이 1%p 증가할 때 i 의 고용확률이 β_1 %p 만큼 변한다는 것을 의미한다. Hahn et al.(2023)은 Bramoullé et al.(2009)이 제안한 대로 친구의 친구 평균 특성을 도구변수로 사용하여 동료효과를 식별했다.

Bramoullé et al.(2009)의 도구변수는 이론적으로 유효하지만, 실제 데이터에 적용할 때는 여전히 다양한 식별위협이 존재한다(Angrist, 2014). Hahn et al.(2023)에서 사용한 Banerjee et al.(2013)의 Social Networks and Microfinance 데이터의 경우 소셜 네트워크가 불완전하게 관측된다는 문제가 있다. 즉, 일부 주민은 소셜 네트워크 설문 대상이 되지 않았고, 설문 대상자라 하더라도, 네트워크 이웃(친구 등)을 10명까지만 대답할 수 있었다. Bramoullé et al.(2009)의 도구변수는 친구의 친구 중 나의 직접

2) Hahn et al.(2023)은 평균 선형모형 혹은 local average peer effects 모형뿐 아니라 local aggregate peer effects 모형도 함께 분석하였으며, Liu, Patacchini, and Zenou(2014)은 두 모형의 차이 및 도구 변수의 신뢰성에 대해서 자세히 설명하고 있다.

적인 친구가 아닌 사람이 있어야 한다는 가정에 기반하는데, 데이터 수집의 한계로 인해 실제로는 친구가 아닌 “친구의 친구”가 사실은 관측되지 않은 직접 친구일 가능성이 생긴다. 이는 도구변수의 핵심 가정을 위배할 수 있다.

또한, 외생 통제변수 x 가 마땅치 않거나, 식 (42)에서 x 변수가 개인의 y 변수와 상관관계가 적다면, 친구의 친구 특성 역시 연관성이 약해져, 약한 도구변수 문제가 생길 수 있다. 그리고 개발도상국의 마을 단위, 혹은 선진국에서도 학교나 학급 단위의 분석 시에는, 같은 마을 혹은 학급 안에서 직접적인 친구가 아니더라도 서로의 행동에 영향을 미치는 맥락적 효과(contextual effects)가 존재할 수 있다. Hahn et al.(2023)은 이러한 문제들을 해결하기 위해 가상 네트워크(fictitious network)를 이용한 위약 검정(placebo or falsification test)을 수행했다. 이는 각 개인에 대해 실제 친구가 아닌 사람들을 무작위로 가상 친구로 설정한 뒤, 이 가상 친구들의 평균 결과가 개인의 행동에 영향을 미치지 않는지를 확인하는 방식이다. 이 위약 검정에서 동료 효과가 통계적으로 유의하지 않게 나타남으로써, 친구의 친구 도구변수를 이용한 분석 결과의 강건성을 확보했다. 이때, 가상 친구의 평균 결과는 가상의 네트워크를 이용하지만, “가상 친구의 친구” 특성을 구할 때는 실제 관측된 네트워크를 이용했다($W^F y \sim W^F WX$).

V

그 밖의 공식기반 도구변수

이 절에서 소개하는 도구변수는 앞서 소개한 설계기반 도구변수들과는 그 궤를 달리 하는 부분이 있다. 변이할당 도구변수와 재중심화 도구변수 등은, 연구자가 처치변수에 존재하는 외생적 변이만을 추출해서 공식화함에 있어, 그 외생적 변이가 어디서부터 비롯된 것인지 등에 대한 실증적 의미에 관심을 갖는다. 반면 아래 소개하는 도구변수들은 외생적 변이의 실증적 의미보다는 공식을 통한 외생성 증명 가능성에 기반한다고 볼 수 있다. 동료효과 분석 시 사용된, 친구의 친구의 특성을 활용한 도구변수는 그런 면에서는 아래 공식기반 도구변수와 일맥상통하는 면이 있다고 볼 수 있다.

먼저 Lewbel(2012)은 관측자료(observational data)에서 도구변수(instrumental variable, IV)를 찾기 어려운 상황에서, 자료가 갖는 이분산성(heteroskedasticity)을 활용하여 내생적 변수의 인과효과를 식별할 수 있는 방법을 제안하였다. 즉, 외생적 도

구변수가 존재하지 않더라도, 자료의 구조적 특성을 이용해 내부적으로 IV를 생성(endogenous instrument generation)하는 방법을 제시했다.

Lewbel(2012)은 특정한 형태의 이분산성(heteroskedasticity)이 존재한다면, 이를 이용해 내생성(endogeneity)을 보정할 수 있음을 보여준다. 기본모형으로는 식(1)에서 사용한 모형을 이용한다.

$$y_i = \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

Lewbel(2012)은 추가적인 도구변수 없이 어떤 외생적 변수 w_i 가 존재하고, 오차항의 분산이 w_i 에 따라 달라지는 이분산성 구조를 가진다고 가정한다. 즉 $Var(\epsilon_i | w_i)$ 가 w_i 의 함수라는 점을 이용한다. 이 경우 $(w_i - \bar{w})\epsilon_i$ 형태의 변수가 유효한 도구변수로 작동할 수 있다. 실제 추정에서는 오차항을 관측할 수 없기 때문에 x_i 를 w_i 로 회귀한 후 잔차를 이용하여 다음과 같은 형태의 도구변수를 구성할 수 있다: $z_i = (w_i - \bar{w})(x_i - \hat{x})$.

이는 이분산성이 존재한다면 그 자체가 도구변수를 만들어내는 자원이 된다는 직관에 기반한다. 이러한 도구변수는 그 자체로 기본 도구변수로 사용하기보다는, 기존의 도구변수의 외생성 가정 등이 위협받는 상황에서 결과의 강건성을 검증하는 등의 도구로 사용할 수 있다.

Gabaix and Koijen(2024)은 경제 전체의 변동이 다수의 작은 요인보다는 소수의 세분화 단위(granular entities), 즉 몇몇 대기업이나 주요 산업의 충격에 의해 주로 결정될 때, 기존 도구변수 추정이 내생성 문제를 정확히 통제하지 못한다는 점을 지적하고, 이를 교정할 수 있는 세분화 도구변수(granular IV) 방법을 제안한다.

모형에서 변수 x_t 가 수많은 단위의 합으로 구성될 때, 일부 단위(기업, 산업 등)가 지나치게 큰 비중을 차지하면, 그 단위의 개별 행위가 x_t 에 영향을 주어 내생성을 갖게 된다고 본다. 즉, 대형 개체가 전체 거시변수에 영향을 주고, 그 변수가 동시에 그 거시변수에 반응하는 상황으로 역인과관계와 같은 상황이라고 할 수 있다. 변이할당 도구변수에서 특정 i 가 충격 g_k 의 너무 큰 비중을 차지하는 경우도 비슷한 예라고 할 수 있겠다.

이를 해결하기 위해 Gabaix and Koijen(2024)은 x_t 를 외생적 부분과 내생적 세분화된(granular)부분으로 분리한다. 예를 들어, $x_t = \bar{x}_t + g_t$ 로 나누고 이 때 g_t 는 대형 단위의 내생적 변동을 의미한다. 세분화 도구변수(granular IV)는 이 중 예측가능한 내생적 성분을 제거한 뒤 남은 외생적 변이(variation)만을 도구변수로 사용하는 방법이라고 할 수 있다. 이러한 방법은 금융시장, 기업투자, 거시경제 등에서 대형 개체의 충격이 전

체 변수에 미치는 영향을 추정할 때 유용하다. 거시경제 데이터 속에서 내재된 대형 행위자의 자기영향을 제거하고, 외생적 충격만을 이용해 인과관계를 추정하도록 설계된 도구변수 접근법이라 할 수 있다.

VI

결론

도구변수 추정법을 사용하는 데 있어 가장 큰 장애물은, 외생성이 확보된 도구변수를 실제로 찾을 수 있는가 하는 점일 것이다. 본 연구에서는 도구변수를 보다 체계적으로 구축할 수 있도록 도와주는, 설계기반(design-based), 공식기반(formula-based) 도구변수들을 알아보고, 이러한 도구변수의 외생성을 강화하거나, 강건성을 검증하는 방법들을 살펴보았다.

이러한 설계기반 도구변수의 가장 대표적인 사례로 변이할당 도구변수, 재중심화 도구변수(recentered IV), 시뮬레이션 도구변수(simulated IV), 그리고 네트워크기반 모형에서의 도구변수를 살펴보았다. 이 중 가장 중점적으로 살펴본 변이할당 도구변수는 상위 단위(산업, 국가 등)에서 발생한 외생적 충격, 혹은 비중을 이용하는 식별 전략으로, Goldsmith-Pinkham et al.(2020)와 Borusyak et al.(2022)은 각각 비중(share)과 충격(shock)의 외생적 변이를 기준으로 상이한 식별 프레임을 제시했다. 또한, Borusyak and Hull(2023)이 제안한 재중심화 도구변수는 도구변수에서 예측가능한 구조적 변이를 제거함으로써, 외생적 변이만 남기는 방식으로 외생성 가정을 강화하였다. 이러한 접근들은 모두 도구변수의 외생성을 논리적으로 구성하고 검증할 수 있게 만든다는 점에서 공통적 특징을 갖는다.

이러한 다양한 설계기반 도구변수들은 단순히 “적절한 IV를 찾는 문제”를 넘어, “도구변수를 설계하는 문제”로 연구의 초점을 이동시켰다는 점에서 의의가 있다. 즉, 인과효과 식별의 신뢰성은 변수 선택이 아니라 설계의 정교함에서 비롯된다는 인식의 전환이 이루어졌다고 할 수 있을 것이다. 결국, 도구변수 방법론은 단순한 계량기법이 아니라, 인과 분석을 위한 설계적 사고의 한 형태로 진화해왔다. 외생적 변이를 어떻게 정의하고, 이를 어떻게 데이터에 구현할 것인가가 실증연구의 핵심 과제로 자리 잡은 것이다.

향후 연구는 이러한 설계기반 도구변수 접근을 더욱 일반화하여, 복잡한 상호작용 구

조(예: 네트워크, 공간 상호의존, 시간적 동학 등)를 반영하는 방향으로 확장될 것으로 보인다. 본 연구는 다양한 설계기반 도구변수의 이론적 구조와 실증적 구현 사례를 종합적으로 검토함으로써, 연구 설계 자체가 식별의 시작임을 확인하는 시도의 일환이라고 할 수 있을 것이다.

참고문헌

- 김준호, 『이민자 유입이 지역경제에 미치는 영향: 지역 소비자물가지수 채널을 중심으로』, 산업연구원, 2025.
- 조희평·강동익, 『외국인 이민자의 유입이 재정에 미치는 영향』, 한국조세재정연구원 연구보고서 22-15, 2022.
- 한요셉, 『인공지능으로 인한 노동시장의 변화와 정책방향』, 한국개발연구원, 2023.
- Abayasekara, A., Kim, J. S., & Wang, L. C., “Impacts of housing costs on health and satisfaction with life circumstances: Evidence from Australia,” *Health Economics*, 34(4), 2025, pp. 741~757.
- Acemoglu, D., & Restrepo, P., “Robots and jobs: Evidence from US labor markets,” *Journal of Political Economy*, 128(6), 2020, pp. 2188~2244.
- Anderson, T. W., & Rubin, H., “Estimation of the parameters of a single equation in a complete system of stochastic equations,” *The Annals of Mathematical Statistics*, 20(1), 1949, pp. 46~63.
- Andrews, I., Stock, J. H., & Sun, L., “Weak instruments in instrumental variables regression: Theory and practice,” *Annual Review of Economics*, 11(1), 2019, pp. 727~753.
- Angrist, J. D., “The perils of peer effects,” *Labour Economics*, 30, 2014, pp. 98~108.
- Angrist, J. D., & Krueger, A. B., “Does compulsory school attendance affect schooling and earnings?,” *The Quarterly Journal of Economics*, 106(4), 1991, pp. 979~1014.
- Autor, D. H., Dorn, D., & Hanson, G. H., “The China syndrome: Local labor market effects of import competition in the United States,” *American Economic Review*, 103(6), 2013, pp. 2121~2168.
- Baak, C., & Kim, J. S., *Lost connections, lost opportunities: The impacts of immigration on social capital and local income*, Working Paper, 2025.
- Banerjee, A., Chandrasekhar, A. G., Duflo, E., & Jackson, M. O., “The diffusion of microfinance,” *Science*, 341(6144), 2013, Article 1236498.
- Bartik, T. J., *Who Benefits from State and Local Economic Development Policies?*

- Kalamazoo, MI: W.E. Upjohn Institute for Employment Research, 1991.
- Borusyak, K., & Hull, P., “Nonrandom exposure to exogenous shocks,” *Econometrica*, 91(6), 2023, pp. 2155~2185.
- Borusyak, K., & Hull, P., *Optimal formula instruments*, NBER Working Paper No. 33594, National Bureau of Economic Research, 2025.
- Borusyak, K., Hull, P., & Jaravel, X., “Quasi-experimental shift-share research designs,” *The Review of Economic Studies*, 89(1), 2022, pp. 181~213.
- Borusyak, K., Hull, P., & Jaravel, X., “Design-based identification with formula instruments: A review,” *The Econometrics Journal*, 28(1), 2025, pp. 83~108.
- Bramoullé, Y., Djebbari, H., & Fortin, B., “Identification of peer effects through social networks,” *Journal of Econometrics*, 150(1), 2009, pp. 41~55.
- Card, D., “Immigration and inequality,” *American Economic Review*, 99(2), 2009, pp. 1~21.
- Chetty, R., Jackson, M. O., Kuchler, T., Stroebel, J., Hendren, N., Fluegge, R. B., et al., “Social capital I: Measurement and associations with economic mobility,” *Nature*, 608(7921), 2022, pp. 108~121.
- Cragg, J. G., & Donald, S. G., “Testing identifiability and specification in instrumental variable models,” *Econometric Theory*, 9(2), 1993, pp. 222~240.
- Currie, J., & Gruber, J., “Health insurance eligibility, utilization of medical care, and child health,” *The Quarterly Journal of Economics*, 111(2), 1996, pp. 431~466.
- Gabaix, X., & Koijen, R. S., “Granular instrumental variables,” *Journal of Political Economy*, 132(7), 2024, pp. 2274~2303.
- Goldsmith-Pinkham, P., Sorkin, I., & Swift, H., “Bartik instruments: What, when, why, and how,” *American Economic Review*, 110(8), 2020, pp. 2586~2624.
- Hahn, Y., Kim, J. S., & Yang, H. S., *Gender heterogeneity in peer effects on work: Evidence from multidimensional social networks in rural India*, Working Paper, 2023.
- Kim, H., “The impact of robots on labor demand: Evidence from job vacancy data in South Korea,” *Empirical Economics*, 67(3), 2024, pp. 1185~1209.
- Kleibergen, F., & Paap, R., “Generalized reduced rank tests using the singular value decomposition,” *Journal of Econometrics*, 133(1), 2006, pp. 97~126.

- Lewbel, A., "Using heteroscedasticity to identify and estimate mismeasured and endogenous regressor models," *Journal of Business & Economic Statistics*, 30(1), 2012, pp. 67~80.
- Liu, X., Patacchini, E., & Zenou, Y., "Endogenous peer effects: Local aggregate or local average?," *Journal of Economic Behavior & Organization*, 103, 2014, pp. 39~59.
- Manski, C. F., "Identification of endogenous social effects: The reflection problem," *The Review of Economic Studies*, 60(3), 1993, pp. 531~542.
- Miguel, E., & Kremer, M., "Worms: Identifying impacts on education and health in the presence of treatment externalities," *Econometrica*, 72(1), 2004, pp. 159~217.
- Montiel Olea, J. L., & Pflueger, C., "A robust test for weak instruments," *Journal of Business & Economic Statistics*, 31(3), 2013, pp. 358~369.
- Rotemberg, J. J., *Instrumental Variable Estimation of Misspecified Models*, MIT Sloan School Working Paper, 1983.
- Stock, J. H., & Yogo, M., "Testing for weak instruments in linear IV regression," in D. W. K. Andrews & J. H. Stock (eds.), *Identification and Inference for Econometric Models: Essays in Honor of Thomas Rothenberg*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005, pp. 80~108.
- Tabellini, M., "Gifts of the immigrants, woes of the natives: Lessons from the age of mass migration," *The Review of Economic Studies*, 87(1), 2020, pp. 454~486.

부록

1. 약한 도구변수(weak instrument) 검정

도구변수의 외생성을 강조하다 보면, 도구변수가 충족시켜야 하는 또 다른 핵심 가정한 연관성(relevance)이 약해지는 경우가 생긴다. 관심 설명변수와 도구변수의 연관성은 다행히 통계적으로 검정할 수 있다, 가장 기본적인 검정법은 2단계 최소자승법(two-stage least squares, 2SLS) 추정법의 1단계 회귀식에 있어서 도구변수의 회귀계수 값이 통계적으로 유의한지를 확인하는 것이다. 다만 기존 연구에 따르면, 1단계 회귀식의 회귀계수가 통계적으로 유의한 것만으로는 충분하지 않고 어느 정도의 임계값(critical value)을 넘어야 하며, 이에 따라 회귀계수에 대한 z 혹은 t 검정보다는 F-통계량을 사용하는 것이 적절하다는 이론이 정립되어 왔다(Stock and Yogo, 2005).

전통적으로는 1단계 회귀식에서 도구변수의 연관성을 테스트하는 방법으로 Cragg-Donald의 F-통계량과 Stock-Yogo 어림법칙(rule of thumb)이 사용되어 왔다(Cragg and Donald, 1993). 그러나, 오차항이 이분산성을 띄거나, 데이터가 군집(cluster) 구조를 가질 경우, 군집 강건 표준오차(cluster robust standard error)를 사용해야 하며, 이 경우, Cragg-Donald F-통계량을 그대로 적용하면 부정확한 결과를 가져올 수 있다는 문제가 제기되었다. 이러한 문제를 보완하기 위해, Kleibergen-Paap F-통계량(Kleibergen and Paap, 2006)과 Olea Montiel-Pflueger F-통계량(Olea Montiel and Pflueger, 2013)이 이러한 이분산성 및 군집 강건 표준오차에 있어서 강건한 대안을 제공한다.

특히 본 연구보고서에서 다른 대부분의 경우처럼 관심 설명변수와 도구변수가 각각 하나씩 있는 완전 식별(exactly identified) 모형에서는 Kleibergen-Paap F-통계량과 Olea Montiel-Pflueger F-통계량이 일치한다. 따라서 Stata와 같은 통계프로그램의 도구변수 분석 기본 명령어, 혹은 추가로 설치할 수 있는 도구변수 분석 명령어(예: ivreg2, ivreg28, xtivreg2, xtivreg28) 등을 이용하면 해당 F-통계량을 얻을 수 있다.

이와 약간 다른 접근으로, 약한 도구변수가 있는 경우에도 2단계 추정식의 회귀계수가 유의한지를 검정할 수 있는 방법이 있다. Anderson-Rubin F-검정이 그것으로, 약한 도구변수에 대해 강건한 추론을 가능하게 한다(Anderson and Rubin, 1949; Andrews et al., 2019). 역시 Stata를 사용하는 경우, ivreg28, xtivreg28과 같은 명령어를 통해 해당 검정을 수행할 수 있으며, Anderson-Rubin p-값 등을 이용해 2단

계 추정식 회귀계수의 유의성을 평가할 수 있다.

설계기반 도구변수를 구축하는 경우, 일반적으로 외생성을 강조하는 설계 구조를 따르기 때문에, 1단계 회귀식에서 약한 도구변수가 될 우려가 있다. 이 경우 분석 결과에 대한 신뢰도가 낮아질 수 있으므로, 먼저 Kleibergen-Paap F-검정(혹은 Oleva Montiel-Pflueger F-검정)의 F-통계값을 제공하고, 이 값이 어림법칙에서 제안하는 Stock-Yogo 임계값을 초과하는지 확인해 보는 것이 첫 번째로 수행해야 할 일이다. 그리고, 그다음으로는 Anderson-Rubin F-통계값과 p-값을 제공하여, 약한 도구변수에도 불구하고 2단계 추정식의 회귀계수(즉 인과 영향 추정치)가 유의한지를 보여주는 것이 필요하다. 이러한 절차가 가장 기본적으로 수행되어야 할 약한 도구변수 검정이라 할 수 있다.

제4장

시계열 예측 방법론

이 승 희 | 한국개발연구원

최근 글로벌 경제는 대내외 불확실성이 확대되고 예상치 못한 급격한 충격이 빈번히 발생하고 있다. 글로벌 금융위기, 코로나19 팬데믹, 지정학적 갈등 등은 실물경제와 금융시장에 동시에 막대한 영향을 주었다. 이에 따라 경제상황은 과거보다 훨씬 더 높은 변동성을 나타냈다. 이처럼 확대된 변동성은 경제주체의 경기예측 가능성을 크게 악화시키게 된다. 따라서 현재 경제상황을 신속하고 정확하게 파악할 수 있는 경기진단 시스템에 대한 중요성이 커지고 있다.

물론 정책 당국은 다양한 데이터와 통계를 바탕으로 현재 경기에 대한 진단과 판단을 수행하고 있다. 그러나 기존 공식 통계는 작성 과정에서 상당한 시차를 수반하며, 발표 이후에도 잦은 수정이 이루어진다. 예를 들어 경제상황 판단에 가장 대표적으로 활용되는 지표인 국내총생산(GDP)을 생각해 보자. 한국은행에서 분기별로 발표하는 국내총생산은 분기 종료 후 통계 발표까지 상당한 시간이 소요되며, 발표 이후에도 수정된다. 한국은행은 국내총생산을 속보치, 잠정치, 그리고 확정치 총 3단계에 걸쳐 발표한다. 가장 먼저 발표되는 것은 속보치이다. 속보치가 발표되는 시점은 매 분기 말 약 한달 후(해당 분기 후 28일 이내)이다. 매 분기 말 약 두달 후(해당 분기 후 70일 이내)에는 잠정치를 발표한다. 가장 마지막으로 발표되는 확정치는 통상 1년 후에 발표된다. 가장 먼저 발표되는 속보치의 경우에도 분기 종료 후에 한달 정도 경과되어야 발표된다는 점에서, 기존 경제지표만을 바탕으로 경기를 판단하는 것은 실기의 위험이 있다.

즉, 기존 통계가 발표되기까지 소요되는 상당한 시차로 인해 정책당국의 정책판단과 실제 경기국면 간의 큰 괴리가 발생할 수 있다. 이는 정책의 적시성과 실효성을 저해하는 요인으로 작용할 우려가 크다. 이러한 간극을 메울 수 있는 한 가지 방법으로 최근 나우캐스팅(nowcasting)이 큰 주목을 받고 있다. 나우캐스팅은 현재를 뜻하는 'Now'와 미래를 예측하는 'Forecasting'의 합성어이다. 용어에서 바로 알 수 있듯이 나우캐스팅은 아직 공식 통계가 발표되지 않은 시점에 다른 통계와 지표를 이용하여 현재 경제상황을 예측하는 기법을 의미한다. 즉, 나우캐스팅은 주로 발표되지 않은 지표 대신 빅데이터를 활용하여 발굴한 데이터나 고빈도 지표를 이용하여 시차 문제를 해소하고 경기진단을 실시간으로 수행한다.

정책연구에 있어 나우캐스팅은 정책대응의 적시성을 확보하고 정책효과를 극대화할

수 있다는 점에서 중요하다. 일반적으로 정책당국의 거시경제정책은 정책시행 이후 정책으로 인한 효과가 나타나기까지 어느 정도 시차가 존재한다. 따라서 현시점 경기에 대한 판단이 정책대응의 적절성을 결정한다고 해도 과언이 아니다. 나우캐스팅을 통해 실시간으로 신속하게 경기에 대한 진단을 수행할 수 있다면 이는 정책대응에 크게 기여할 수 있다. 신속한 경기판단을 바탕으로 경기 침체기에 조기 대응을, 경기 과열기에는 선제적 조정을 가능하게 할 수 있기 때문이다. 이는 정책실패 가능성을 줄이고 정책효과 제고에 크게 기여한다. 이와 같은 나우캐스팅의 필요성은 경제 충격기에 더 두드러진다. 예상치 못한 충격으로 경기가 급변하는 상황에서 정책당국은 공식 통계 발표 전 경기에 관한 판단을 수행하고 정책적 개입 여부를 결정해야 하기 때문이다.

특히 최근 데이터 사이언스의 발달로 빅데이터가 활용 가능해지면서 나우캐스팅의 활용 범위는 더욱 확대되고 있다. 과거에는 활용되지 않았던 민간부문의 데이터나 비정형 데이터 등 빅데이터는 나우캐스팅의 경기진단 활용범위 확대와 정확성 제고에 기여하고 있다. 예를 들어 온라인 포털의 검색어나 검색량은 소비와 소비 심리를 파악하는 데 유용하게 사용되고 있다. 카드 결제 자료를 바탕으로 가계 소비 동향을 파악하고 있으며, 물류 및 운송 데이터를 이용하여 생산 및 수출, 수입의 변화를 포착하기도 한다. 이와 같은 새로운 유형의 데이터는 머신러닝(machine learning), 딥러닝(deep learning) 등 인공지능 기법이나 전통적인 시계열 분석 방법과 결합하고 있다. 이를 바탕으로 기존 경기진단 시스템의 한계를 극복하고 경제의 흐름을 실시간으로 모니터링할 수 있는 새로운 연구가 활발히 이루어지고 있다.

나우캐스팅은 단순한 예측 기법을 넘어서 실시간 경기진단을 바탕으로 한 정책운영에 필수적인 시스템으로 자리매김하고 있다. 불확실성과 변동성이 상시화된 최근 경제 환경에서 정책당국에 이러한 실시간 경기진단 시스템은 이제 필수적이다. 나우캐스팅은 실시간 경기진단 시스템 구축에 필수적인 방법론으로 향후 그 중요성은 더욱 커질 것이다. 이에 따라 본 보고서에서는 나우캐스팅을 중심으로 시계열 예측 방법론에 관해 다루고자 한다. II장에서는 기본적인 시계열 예측 방법을 소개한다. III장에서는 나우캐스팅에 초점을 맞춰 주요 나우캐스팅 사례와 모형들에 대해 논의하고자 한다. 마지막으로 IV장에서는 본 보고서의 결론을 맺는다.

시계열 예측은 일반적으로 시계열 예측 모델을 바탕으로 이루어진다. 예측하고자 하는 변수가 있을 때 예측 모델을 바탕으로 예측을 수행하고 예측력을 평가하는 방법이 일반적이다. 1절에서는 시계열 예측 모형을 큰 틀에서 개관하고 2절에서는 예측력을 평가하는 방법에 대해 논의한다.

1. 시계열 예측 모형

시계열 예측 모형은 크게 자기회귀모형(autoregressive model)과 같은 고전적인 시계열 예측 모형과 최근 들어 각광을 받고 있는 머신러닝, 딥러닝 등 인공지능 기반 시계열 예측 모형으로 구분할 수 있을 것이다. 고전적인 시계열 예측 모형은 주로 시계열 데이터의 선형관계를 모형화하여 모형이 간단하고 해석이 용이한 장점이 있다. 이때 일반적으로 시계열 데이터는 정상성(stationarity) 가정을 바탕으로 한다.¹⁾ 정상성은 직관적으로 시계열의 성질이 시간에 따라 변화하지 않음을 의미한다.²⁾ 이러한 고전적인 시계열 예측 모형은 모형화한 시계열의 관계가 과거와 달라지는 경우 예측력이 저하될 수 있고 예측에서 과거와 유사한 특정 패턴이 나타났을 때 과거의 정보를 예측에 활용하기 어렵다는 한계 등이 존재한다. 반면 인공지능 기반 시계열 예측 모형은 시계열 데이터의 비선형 관계나 복잡한 동적관계까지 모형화가 가능하다는 장점이 있다. 또한 시계열 예측 뿐만 아니라 분류(classification)나 이상치 탐지(anomaly detection) 등에도 활용이 가능하다. 그러나 인공지능기반 모형이 가지는 중요한 한계인 결과에 대한 해석이 거의 불가능하다는 한계가 존재한다.³⁾ 즉, 요약하자면 고전적인 시계열 예측 모형은 분석

-
- 1) 비정상성 시계열의 경우 주로 차분(difference) 등을 통해 정상성 시계열로 변환한 후 예측에 활용하는 것이 일반적이다.
 - 2) 정상성에는 크게 시계열의 결합 분포가 시간에 따라 변화하지 않음을 가정하는 강정상성(strict stationarity)과 시계열의 첫 두 적률(moment)이 시간에 따라 변화하지 않음을 가정하는 약정상성(weak stationarity)으로 구분할 수 있다. 일반적으로 정상성 시계열은 약정상성 시계열을 의미한다. 즉, 시계열의 평균과 공분산이 시간에 따라 변화하지 않음을 가정하는 것이다. 직관적으로 이러한 정상성 가정은 시계열 예측 모형에서 매우 중요하다. 시간에 따라 변화하지 않는 성질로 인해 과거 데이터를 바탕으로 시계열 데이터의 관계를 모형화하여도 이러한 모형이 향후 유지될 것으로 가정할 수 있기에 예측에 활용할 수 있기 때문이다.
 - 3) 물론 최근 들어 설명가능한 인공지능(Explainable AI; XAI)이나 대리모형(surrogate)을 이용하여 결과에 대한 해석을 적어도 일정 수준 이상 수행할 수 있다. 그러나 예측 모형에서는 예측력과 해석가능성(interpretability)은 반비례하는 것이 일반적이다.

을 위해 주로 시계열 데이터의 특징을 단순화하여 모형화한다. 반면, 딥러닝 등 인공지능 시계열 예측 모형들은 모형의 복잡성을 증대시켜 기존 모형으로는 포착하기 어려운 특성들을 반영하고자 한다고 할 수 있다. 물론, 모형의 복잡성이 커질수록 모형에서 추정해야 할 모수의 개수도 증가하기 때문에 복잡한 모형이 단순한 모형에 비해 항상 예측력이 우월하다고 할 수는 없다. 대표적인 시계열 예측 모형에 대한 소개는 나우캐스팅과 연관 지어 III장에서 다룬다.

2. 시계열 예측 평가⁴⁾

시계열 예측 평가는 시계열 모형의 예측치를 중심으로 평가한다. 대다수 모형 예측력 평가가 그렇듯 표본 내 예측(in-sample fitting)이 아닌 표본 외 예측(out-of-sample forecasting)을 바탕으로 평가가 이루어진다. 이는 표본 내 예측은 단순히 모형이 주어진 데이터를 얼마나 잘 설명하는지를 중심으로 평가하기 때문이다.⁵⁾ 실제 시계열 예측에서는 현재시점에서는 알 수 없는, 새로운 상황인 미래에 대한 예측이 필요하다. 따라서 직관적으로도 시계열 예측은 모형 추정에 사용되지 않은 기간을 중심으로 이루어진다. 시계열 예측의 평가는 간단히 다음과 같은 단계를 통해 이루어진다.

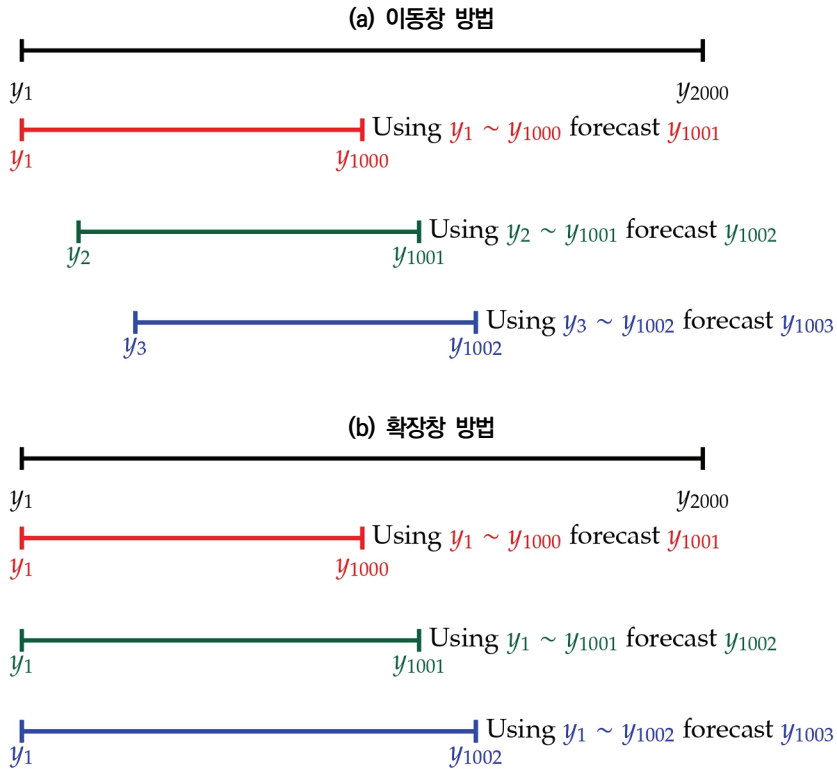
1. 시계열 예측 모형의 표본외 예측을 통해 예측치를 산출
2. 손실함수(loss function)를 바탕으로 실제값과 예측치 간 차이 측정
3. 예측 모형간 손실함수 값의 차이가 통계적으로 유의한지 검정

각 단계에 대해 부연 설명하자면, 먼저 예측력을 평가하고자 하는 모형에서 예측치를 산출한다. 이를 위해 시계열 표본 구간을 예측 모형의 추정에 활용할 기간과 표본 외 예측 평가를 수행할 기간으로 나눈다. 이는 머신러닝(machine learning)에서 표본을 머신러닝 모형의 추정 및 적합에 활용할 훈련 데이터(training data)와 예측력 평가에 활용할 테스트 데이터(testing data)로 나누어 활용하는 것과 개념적으로 동일하다. 즉, 주어진 시계열 예측 모형을 훈련 데이터에서 추정하고 테스트 데이터에서 표본 외 예측을 수행하여 예측치를 얻는 것이다.

4) 시계열 예측 평가 과정에 대한 자세한 설명은 한희준(2025)을 참고하기를 바란다.

5) 이에 따라 흔히 과적합(overfitting) 문제가 발생할 가능성이 높다. 이는 모형이 추정에 활용된 데이터에 대한 적합도를 극단적으로 높이면서 실제 중요한 미래 데이터에 대한 예측 성능이 현저히 떨어지는 문제를 의미한다.

[그림 4-1] 표본외 예측 평가방식



자료: 저자 작성

시계열의 표본외 예측은 훈련 데이터를 정의하는 방법에 따라 크게 이동창(rolling window) 방법과 확장창(expanding window) 방법이 있다. 이동창 방법은 매 표본외 예측을 수행할 때 훈련 데이터의 크기를 고정하여 수행하는 방법이다. 반면 확장창 방법은 훈련 데이터의 크기를 늘려가며 표본외 예측을 수행한다. [그림 4-1]은 이러한 표본외 예측 평가방식을 도식화하여 나타낸다. 예를 들어 시계열 $\{y_t\}$ 가 $t = 1, \dots, 2000$ 까지 주어져 있다고 가정해 보자. 특정 시계열 예측 모형의 예측력을 평가하기 위해 표본외 예측을 위한 기간으로 $t = 1001, \dots, 2000$ 까지 설정한 상황이다. 이러한 상황에서 이동창 방법은 각 표본외 예측기간의 예측치 산출을 위해 고정된 크기의 표본을 이용한다. 예를 들어 [그림 4-1]의 패널 (a)에서처럼 y_{1001} 을 예측하기 위해서 y_1, \dots, y_{1000} 까지 1,000개의 관측치를 이용하는 경우를 생각해 보자. 이 경우, 다음 y_{1002} 를 예측하기 위해서는 마찬가지로 1,000개의 관측치를, 즉 y_2, \dots, y_{1001} 까지 이용하여 예측을 수행한다. [그림 4-1]의 패널 (b)는 확장창 방법을 나타낸다. 앞의 예와 동일하게 y_{1001} 을 예측하기 위해

서 y_1, \dots, y_{1000} 까지 1,000개의 관측치를 이용하더라도 다음 y_{1002} 를 예측하기 위해서는 관측치의 수를 늘려 1,001개의 관측치를, 즉 y_1, \dots, y_{1001} 까지 이용하여 예측을 수행한다. 이와 같은 방법을 통해 표본외 예측기간 동안 예측 모형별 예측치를 산출할 수 있다.

이와 같이 표본외 예측을 수행한 후 다음 2단계에서 손실함수를 바탕으로 실제값과 예측치 간 차이를 측정한다. 물론 실제값과 예측치 간 차이는 작으면 작을수록 좋다. 이를 실제 정량화하여 평가할 때 중요한 점은, 그렇다면 어떻게 실제값과 예측치 간 차이를 측정할 것인가에 관한 것이다. 손실함수는 이러한 실제값과 예측치 간 차이를 정량화한다. 우선 손실함수를 L , 실제값을 y_t , 이에 대한 예측치를 \hat{y}_t 로 정의하자. 손실함수는 다음과 같은 수식을 통해 표현할 수 있다.

$$L(y_t, \hat{y}_t)$$

즉, 실제값과 예측치를 손실함수에 투입하여 실제값과 예측치 간 차이를 함수의 결과물로 얻게 된다. 그렇다면 손실함수 L 의 형태는 어떻게 정의할까? 가장 대표적인 손실함수의 형태로는 제곱오차(squared error)와 절대오차(absolute error)가 있다. 제곱오차는 다음과 같이 실제값과 예측치 간 차이의 제곱으로 정의된다.

$$L(y_t, \hat{y}_t) = (y_t - \hat{y}_t)^2$$

절대오차는 실제값과 예측치 간 차이의 절댓값으로 정의된다. 이는 수식으로 다음과 같다.

$$L(y_t, \hat{y}_t) = |y_t - \hat{y}_t|$$

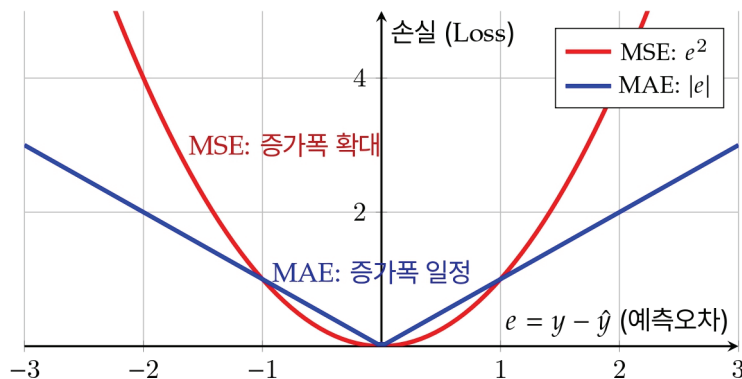
제곱오차와 절대오차의 정의에서 볼 수 있듯이, 실제값 y_t 와 예측치 \hat{y}_t 간 차이가 작을수록 손실함수의 값 또한 작아지는 구조이다. 일반적으로 실제 예측력 평가에서는 평균제곱오차(mean squared error)와 평균절대오차(mean absolute error)가 주로 활용된다. 이들은 단순히 제곱오차와 절대오차의 평균으로 다음과 같이 정의된다.

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2, MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |y_t - \hat{y}_t|$$

물론 이와 같은 형태에서도 공통적으로 실제값과 예측치 간 차이가 작을수록 평균제곱오차나 평균절대오차가 작아지게 된다. 차이점은 오차의 크기에 따라 손실함수가 어

떻게 평가되는지에 따라 다르다. [그림 4-2]는 평균제곱오차와 평균절대오차의 차이를 나타낸다. 그림에서 볼 수 있듯이 평균제곱오차는 실제값과 예측치 간 차이를 제곱하여 평균을 취하기 때문에 손실함수는 오차가 크면 클수록 그 차이를 더 크게 반영한다. 이를 평균을 취하게 되면 결국 오차가 큰 경우에 대해 더 큰 가중치를 반영한다고 할 수 있다. 반면, 평균절대오차는 모든 오차의 절댓값만을 취해 평균을 구한다. 손실함수 값은 오차가 증가함에 따라 일정하게 증가하게 되고, 평균을 취하게 되면 오차의 크기에 관계없이 동일한 가중치로 평가한다고 볼 수 있다.⁶⁾

[그림 4-2] 평균제곱오차와 평균절대오차



자료: 저자 작성

그렇다면 이를 두 예측 모형 간 예측력 비교에 어떻게 활용할 수 있을까? 직관적으로 서로 다른 예측 모형 간 예측력 비교를 위해서는 각 예측 모형에서 예측치를 바탕으로 손실함수 값을 산출하고 더 작은 값을 가지는 모형의 예측력이 높다고 할 수 있을 것이다. 그러나 단순히 손실함수 값을 비교하는 것만으로는 예측 모형 간 예측력의 차이가 통계적으로 유의한지에 대해 검정할 수 없다. 이를 검정하는 가장 대표적인 방법은 Diebold-Mariano-West(DMW) 검정(Diebold and Mariano, 1995; West, 1996)이다.⁷⁾ DMW 검정은 기본적으로 두 예측 모형의 예측력을 쌍별 비교(pairwise comparison)한다. 두 예측 모형, 모형 1과 모형 2로의 h 단계 앞 예측(h -step ahead

6) 따라서 이상치(outlier)가 존재하는 경우 평균제곱오차는 이상치에 더 민감하게 반응하는 반면, 평균절대오차는 이에 강건(robust)하다.

7) 물론 시계열 예측 모형 간 예측력 검정과 관련된 많은 연구가 활발하게 이루어지고 있으나(cf. Clark and McCracken, 2013) DMW 검정과 GW 검정이 가장 대표적으로 널리 활용되는 검정방법이라 할 수 있다.

forecast)⁸⁾의 예측력을 비교하고자 하는 상황을 가정해 보자. 각 모형에서의 예측치는 각각 $\hat{y}_{1,t+h}$, $\hat{y}_{2,t+h}$ 라고 하자. DMW 검정은 우선 두 예측 모형 간 손실함수의 차이 d 를 다음과 같이 정의한다.

$$d_{t+h} = L(y_{t+h}, \hat{y}_{1,t+h}) - L(y_{t+h}, \hat{y}_{2,t+h})$$

이를 바탕으로 DMW 검정은 다음과 같은 귀무가설(null hypothesis)과 대립가설(alternative hypothesis)을 설정한다.

$$H_0 : E(d_{t+h}) = 0, H_1 : E(d_{t+h}) \neq 0$$

귀무가설 하에서는 두 예측 모형의 손실함수 값의 차이인 d 의 기댓값을 0으로 가정한다. 이는 평균적으로 두 예측 모형의 손실함수 간 차이가 없음을 의미하게 된다. 귀무가설을 기각할 수 없다면 이는 두 예측 모형 간 예측력의 차이가 통계적으로 유의하지 않음을 의미하게 된다. 반면, 대립가설 하에서는 두 예측 모형의 손실함수 간 차이가 존재한다. 즉, 귀무가설을 기각할 수 있다면 이는 두 예측 모형의 손실함수 간 차이가 통계적으로 유의함을 의미한다. 손실함수의 정의상 손실함수가 작은 값을 가질수록 예측력이 높다고 할 수 있다. 따라서 귀무가설을 기각할 수 있다면 손실함수 값이 낮은 예측 모형의 예측력이 다른 모형에 비해 우수하고 그 차이가 통계적으로 유의미한 것을 의미한다. 이를 바탕으로 한 DMW 검정 통계량은 다음과 같이 정의한다.

$$DMW = \frac{\sqrt{T} \bar{d}}{\sqrt{A \widehat{Var}(\sqrt{T} \bar{d})}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

여기서 T 는 표본의 예측을 평가하는 기간의 길이를 의미한다. \bar{d} 는 $\sum_{t=1}^T d_{t+h} / T$ 를 의미하며, 점근 분산(asymptotic variance)의 추정치인 $A \widehat{Var}$ 은 Newey-West 추정량(Newey-West estimator)을 이용한다. (Newey and West, 1987) 즉, 이는 손실함수 d 의 표본평균을 바탕으로 한 검정통계량이라고 할 수 있다. 검정통계량이 일반적인 표준정규분포(standard normal distribution)로 분포수렴(convergence in distribution)하기 때문에 통계적 유의성을 쉽게 검정할 수 있다.

Giacomini-White(GW) 검정(Giacomini and White, 2006)은 이와 같은 DMW

8) h 는 1, 2, ... 등 주로 정수값을 가진다. $h=1$ 인 경우가 가장 일반적인 예측이고 $h \geq 2$ 인 경우는 다단계 앞 예측(multi-step ahead forecast)라고 한다.

검정을 발전시킨 방법이다. 구체적으로 GW 검정은 조건부 예측력에 대한 검정을 수행한다. 비교를 위해 Giacomini and White(2006)는 DMW 검정이 다음과 같은 귀무가설을 검정한다고 제시한다.

$$H_0 : E[L(y_{t+h}, \hat{y}_{1,t+h}(\theta_1^*)) - L(y_{t+h}, \hat{y}_{2,t+h}(\theta_2^*))] = 0$$

여기서 θ^* 는 각 예측 모형의 참모수(true parameter)이다. 예측 모형의 모수에 대한 예측치가 일치성(cosistency)을 만족한다는 가정하에서 이는 추정치가 확률수렴(convergence in probability)하는 값으로 볼 수 있다. 위 귀무가설은 예측모형의 예측치가 평균적(무조건부 평균에서)으로 동일함을 의미한다. 그러나 실제 예측 환경을 생각해보면 DMW의 검정은 다소 강한 가정을 바탕으로 하고 있음을 알 수 있다. 일반적으로 예측치는 추정치의 확률 극한값이 아닌 추정치 자체에 의존하고 예측력에 대한 기대도 각 시점의 가용한 정보집합(information set)에 의존할 수 밖에 없다. 예를 들어 이동창 방법을 통해 표본의 예측을 수행하는 경우를 생각해 보자. 이 경우 각 예측치는 훈련 데이터에서 추정된 예측 모형의 추정치에 의존하게 되고 다음 표본의 예측을 수행하는 경우는 훈련 데이터가 달라져 가용한 정보의 수준도 달라진다. 따라서 Giacomini and White(2006)는 이러한 조건부 예측력 평가가 실제 예측환경과 부합하여 보다 현실적인 예측력을 평가할 수 있음을 제시한다. GW 검정의 귀무가설은 다음과 같이 조건부 기댓값을 바탕으로 설정한다.

$$H_0 : E[L(y_{t+h}, \hat{y}_{1,t+h}(\hat{\theta}_1)) - L(y_{t+h}, \hat{y}_{2,t+h}(\hat{\theta}_2)) \mid G_t] = 0$$

G_t 는 t 시점의 정보집합을 의미한다. Giacomini and White(2006)는 손실함수의 차가 마팅계일 차분수열(martingale difference sequence)임을 이용하여 왈드통계량(Wald statistic)의 형태를 따르는 검정통계량을 고안했다. 일반적인 왈드통계량과 같이 점근적으로 이는 카이제곱분포(chi-squared distribution)를 따르게 된다.

즉, 이상의 내용을 종합할 때 일반적인 시계열 예측 과정은 ① 표본의 예측을 통해 예측력을 평가하고자 하는 두 개 이상의 모형들로부터 예측치를 구하고, ② 손실함수를 이용하여 실제값과 예측치 간 차이를 측정 한 후 ③ 통계적 검정을 통해 예측 모형 간 손실함수가 통계적으로 유의한지 확인하는 과정으로 이루어져 있다고 할 수 있다.

간단한 시계열 예측 모형을 바탕으로 실제 시계열 예측 평가 과정을 살펴보도록 하자. II장에서는 시계열 예측력 평가에서 가장 기본적인 벤치마크 모형이 되는 AR(1)과 임의보행(random walk) 모형을 바탕으로 예측 평가를 수행한다. 일반적으로 시계열 예

측 연구에서는 새로운 예측 모형을 제시하고 예측 모형의 예측력을 AR(1), 임의보행 모형 등과 비교하는 경우가 많다. 실제 예를 통한 시계열 예측 평가 과정을 간단히 소개하기 위해 AR(1) 모형이 임의보행 모형보다 예측력이 우수한지를 살펴보는 경우를 가정하자. 구체적으로 AR(1) 모형과 임의보행 모형은 각각 다음과 같이 모형화할 수 있다.

$$\text{AR}(1) : y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\text{임의보행} : y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$$

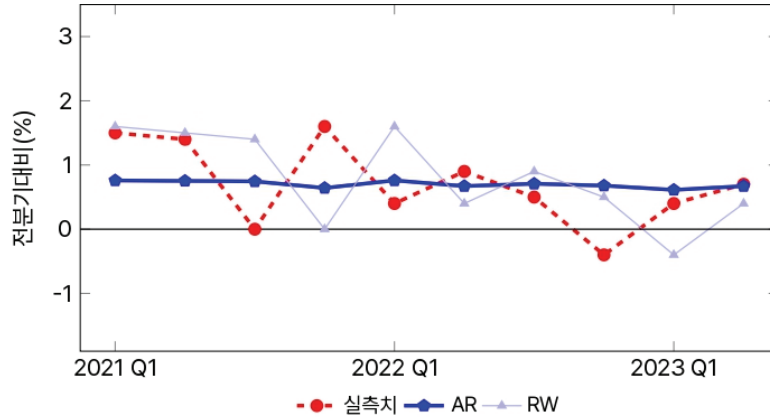
시계열 예측에 대한 상황은 이동차 방법으로 과거 5년 데이터를 활용하여 2021년 1분기부터 2023년 2분기까지 국내총생산에 대한 표본외 예측을 수행하는 것을 가정해보자. 예를 들어 2021년 1분기 국내총생산 예측을 위해서는 다음과 같은 과정을 거쳐 예측치를 얻는다.⁹⁾

1. 2016년 1분기에서 2020년 4분기까지 국내총생산 데이터를 바탕으로 AR(1) 모형의 모수 ϕ 를 추정
2. 추정된 $\hat{\phi}_{(1)}$ 와 예측치 $\hat{\phi}y_{2020:Q4}$ 을 바탕으로 2021년 1분기 국내총생산 예측
3. 2016년 2분기에서 2020년 4분기까지 국내총생산 데이터를 바탕으로 AR(1) 모형의 모수 ϕ 를 추정
4. 추정된 $\hat{\phi}_{(2)}$ 와 예측치 $\hat{\phi}y_{2021:Q1}$ 을 바탕으로 2021년 2분기 국내총생산 예측
5. 이와 같은 과정을 반복

[그림 4-3]은 이러한 방법을 바탕으로 구한 표본외 예측의 예측치를 나타낸다. 그림 상 빨간색 점선은 실제값을, 파란색 실선은 AR(1) 모형의 예측치를 의미한다. 앞서 소개한 바와 같이 실제값과 예측치 간 차이인 예측오차가 작을수록 모형의 예측력이 우수하다고 할 수 있다. 그러나 그림만으로는 이에 대해 평가하기 어렵다. 따라서 이를 수치화하여 손실함수값, 예를 들어 평균제곱오차를 구하고 이를 이용하여 예측력 평가 검정을 수행하는 것이 일반적이라 할 수 있다.

9) 임의보행 모형은 모형에서 추정해야 할 모수가 없기에 추정과정 없이 단순히 바로 직전 과거값을 예측치로 활용한다.

[그림 4-3] 국내총생산 예측(2021년 1분기~2023년 2분기)



주: 저자 계산

2021년 1분기에서 2023년 2분기 예측치를 바탕으로 평균제곱오차를 평가했을 때, AR(1) 모형 평균제곱오차는 0.38, 임의보행 모형의 평균제곱오차는 0.79로 나타났다. 평균제곱오차가 작을수록 예측력이 우수함을 의미하기 때문에 AR(1) 모형의 예측력이 임의보행에 비해 높은 것을 확인할 수 있다. 이와 같은 예측력 차이가 통계적으로 유의한지는 GW 검정 등을 통해 확인하여야 한다. GW 검정 결과 두 모형 간 예측력 차이가 1% 수준에서 통계적으로 유의한 것으로 나타났다. 이상을 종합하면 예측력 평가를 위해 예측력을 비교하고자 하는 두 모형에 대해 표본외 예측을 수행하고, 손실함수를 바탕으로 예측치와 실제값 간 차이를 측정하였다. 그리고 손실함수를 바탕으로 두 모형 간 예측력 차이가 통계적으로 유의한지를 확인하여 손실함수값이 작은 모형이 예측력이 더 우수함을 보일 수 있었다.

<표 4-1> 예측력 비교(평균제곱오차)

	AR	RW
MSE/GW	0.38	0.79***

주: * <0.1 , ** <0.05 , *** <0.01

자료: 저자 작성

III장에서는 시계열 예측의 한 분야인 나우캐스팅에 초점을 맞춘다. 앞서 소개한 바와 같이 나우캐스팅은 새로운 변수가 발표될 때마다 이를 모형에 투입하여 예측하고자 하는 타겟 변수에 대한 실시간 예측을 가능하게 한다. 이는 전통적인 시계열 예측 방법론과는 접근방식이 다르다. 일반적으로 시계열 예측에서 $t+1$ 시점에 대한 예측은 t 시점까지 가용한 정보를 바탕으로 이루어진다. 예를 들어, 앞서 소개한 가장 대표적인 시계열 모형인 AR(1) 모형을 생각해보자.

$$y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

AR(1) 모형은 $t-1$ 시점의 값 y_{t-1} 을 이용하여 t 시점의 값 y_t 를 모형화한다. 예측에 있어서는 $t+1$ 시점의 y_{t+1} 을 예측하기 위해 t 시점의 y_t 를 이용하는 것이다. 즉, 예를 들어 2025년 3분기 국내총생산을 예측하는 경우에는 2025년 2분기 국내총생산을 이용하여 3분기 국내총생산을 예측하는 것이다. AR(1)와 같은 전통적인 시계열 예측에서는 t 시점에서 $t+1$ 시점까지 이행하는 동안 예측치를 업데이트할 수 없다는 한계를 가진다. t 시점과 $t+1$ 시점 사이에 어떤 경제적 충격이 발생하더라도 이를 예측에 반영할 수 없다. 시간은 연속적이고 우리 경제에 여러 예상하지 못한 충격이 발생할 가능성이 상존한다는 점을 생각해 보았을 때 이는 예측에 커다란 한계로 작용할 우려가 크다. 반면, 나우캐스팅은 최신 계량경제학적 기법들을 결합하여 서로 다른 빈도를 가지는 변수들을 이용한다. 이를 통해 t 시점으로부터 $t+1$ 시점까지 이행되는 동안의 예측치를 지속적으로 업데이트하여 실시간 경기진단을 가능하게 한다. 즉, $t \rightarrow t+1$ 로 이행되는 동안 새로운 정보가 추가될 때마다 예측치를 업데이트하여 경기진단을 실시간으로 수행하는 것이다. 구체적으로 예를 들어 기존 시계열 모형이 t 시점에서 $t+1$ 시점의 값을 예측하는 것에 비해, 나우캐스팅 모형은 매 $t+1/3, t+2/3, \dots$ 등 t 시점과 $t+1$ 시점 사이의 어느 시점에서든 예측시점인 $t+1$ 시점의 값에 대한 예측이 가능하다.

실제 이와 같은 나우캐스팅 모형을 통한 실시간 경기진단은 정책당국에 두 가지 핵심 정보를 제공할 수 있다. 첫째는 현재 경기가 흘러가는 방향이고, 둘째는 경기의 좋고 나쁜 정도이다. $t \rightarrow t+1$ 로 이행되는 동안 예측치를 업데이트하면서 예측치의 흐름을 통해 경기의 흐름을 파악할 수 있고, 또한 예측된 값의 크기에 따라 경기의 좋고 나쁨을 파악

할 수 있다. 구체적으로 예를 들어, $t+1/3$, $t+2/3$, ... 등 나우캐스팅을 통해 매 시점마다 얻어지는 예측치들의 흐름으로 경기흐름을 파악하고 그 값들의 크기를 통해 경기의 좋고 나쁨을 판단할 수 있다.¹⁰⁾

나우캐스팅은 경제 여러 분야에서 널리 활용되고 있으나 가장 대표적인 활용 사례는 국내총생산이다. 실제 후술할 뉴욕연방준비은행의 나우캐스팅 등 많은 나우캐스팅 관련 연구들이 GDP 나우캐스팅을 목표로 하고 있다. 이는 국내총생산이 경제 전반의 상황을 종합적으로 나타내는 핵심 지표이면서도 발표 시차가 길어 정책 결정에 어려움이 있기 때문이다.¹¹⁾ 이에 따라 본 보고서의 실제 나우캐스팅 사례도 국내총생산 나우캐스팅을 다룬다.

그렇다면 이러한 나우캐스팅 모형에서는 어떤 것들을 고려해야 할까? 나우캐스팅 모형을 구축하고 운영하는 과정에서 고려해야 할 주요 과제는 크게 세 가지이다. 첫 번째는 고차원 데이터(high dimensionality)의 문제, 두 번째는 혼합주기(mixed frequency) 문제, 그리고 마지막 세 번째로 데이터들의 발표시점이 달라서 생기는 문제(ragged edge)이다. 성공적인 나우캐스팅을 위해서는 이들 세 가지 과제를 해결할 수 있어야 한다.

첫 번째 과제는 많은 수의 데이터를 다루는 것에 대한 고차원 데이터의 문제이다. 예를 들어 국내총생산 나우캐스팅을 생각해 보자. 나우캐스팅을 통해 예측하고자 하는 변수는 국내총생산이며 이와 관련된 다른 변수들을 이용하여 나우캐스팅하는 것이 일반적이다. 이때 국내총생산 및 그 구성요소들과 관련이 있으면서 이들보다 먼저 발표되는 많은 수의 경제 및 금융변수들을 이용하게 되는데 이때 통계학에서 말하는 'large p , small n ' 문제가 발생할 수 있다. 즉, 관측치의 수(n)에 비해 설명변수의 수(p)가 더 커 발생하는 차원의 저주(curse of dimensionality) 문제를 해결할 수 있어야 한다.

두 번째 과제는 혼합주기 문제이다. 다시 한번 국내총생산 나우캐스팅을 생각해 보자. 예측하고자 하는 변수인 국내총생산은 분기별 데이터이다. 그리고 나우캐스팅에 활용하는 경제 및 금융변수들은 월별 혹은 주별, 일별 주기를 가진다. 즉, 예측하고자 하는 변수와 설명변수 간 주기가 다른 상황이 발생하게 된다. 서로 다른 주기를 가진 변수들을 하나의 모형에서 동시에 처리해야 하므로, 이를 위한 특별한 방법론적 접근이 필요하다.

10) 물론 일반적으로 나우캐스팅은 예측하려는 시점에 가까워질수록 예측치가 실제값에 수렴한다는 특징을 가진다. 직관적으로 이는 시간이 경과하면서 더 많은 정보와 데이터가 축적되고, 이를 나우캐스팅 모형에 반영하면서 예측의 정확성이 향상되기 때문이다.

11) GDP 외에도 각종 계량경제학적 방법들을 활용하여 다양한 경제지표들을 나우캐스팅하고 있다. 주요 활용 분야로는 소비, 투자뿐만 아니라 물가지수, 실업률, 경기침체 위기 지수, 빈곤율 등에 대한 나우캐스팅도 활발히 이루어지고 있다.

세 번째 과제는 데이터들의 발표시점이 달라서 생기는 문제이다. 일반적으로 나우캐스팅에서는 많은 수의 변수를 활용하게 되는데 변수 간의 발표 시점은 모두 다르다. 예를 들어 9월 전산업생산지수는 10월 넷째 주에 발표된다. 반면 9월 소비자심리지수는 9월 마지막 주에 발표된다. 따라서 9월 말일에 이러한 변수들을 바탕으로 나우캐스팅을 수행한다면 소비자심리지수는 9월 데이터를 활용할 수 있지만 전산업생산지수는 8월 데이터까지만 이용할 수 있다. 즉, 시점마다 사용가능한 데이터가 달라진다. 이러한 상황은 나우캐스팅을 연속적으로 수행할 때 지속적으로 발생하기 때문에 이를 해결할 수 있는 방법을 고안해야 한다.

나우캐스팅은 전통적인 시계열 예측 방법론의 한계를 극복하고 실시간 경기진단을 가능하게 하는 혁신적인 접근방식이라고 할 수 있다. 이를 위해서는 고차원 데이터, 혼합주기, 발표시점 차이 등의 해결해야 할 과제들이 존재하고 이러한 문제들을 해결하기 위한 다양한 방법론들이 연구되고 있다. 따라서 1장 ~ 3장에서는 이러한 과제를 해결할 수 있는 방법들을 중심으로 나우캐스팅 모형을 살펴보고자 한다. 4장에서는 가장 대표적인 나우캐스팅 시스템인 뉴욕연방준비은행의 나우캐스팅을 살펴보고 5장에서 이를 바탕으로 우리나라 국내총생산 나우캐스팅을 수행해 보고자 한다.

1. 고차원 데이터 문제

나우캐스팅에서 고차원 데이터 문제를 해결하기 위한 방법으로는 크게 동적요인모형(dynamic factor model)을 이용하거나 베이지안 벡터자기회귀(Bayesian Vector Autoregression; BVAR) 모형을 이용할 수 있다.

가. 동적요인모형

기본적으로 동적요인모형은 상태공간모형(state space model)에 속한다. 따라서 동적요인모형을 이해하기 위해서는 상태공간모형에 대한 이해할 필요가 있다. 상태공간모형은 관측할 수 없는 변수를 이용하여 동적인 움직임을 설명하는 계량경제모형이다. 예를 들어, 동적요인모형 기반 나우캐스팅 모형에서는 다수의 거시 및 금융변수들로부터 추출한 공통 요인(factor)들이 국내총생산을 설명한다고 가정한다. 이러한 공통 요인들은 실제 데이터에서 직접 관측할 수 없고 모형을 통해 추정해야 하는 잠재변수의 성격을 가진다. 상태공간모형은 두 개의 핵심 방정식으로 구성된다. 첫째는 측정방정식(measurement

equation 또는 observation equation)이다. 측정방정식에서는 관측가능한 변수 y_t 를 관측이 불가능한 설명변수 s_t 를 이용하여 설명한다. 둘째는 전이방정식(transition equation 또는 state equation)으로, 관측이 불가능한 s_t 의 동적 행태를 결정한다. 구체적으로는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} y_t &= As_t + u_t \cdots \cdots \cdots \text{측정방정식} \\ s_t &= Bs_{t-1} + v_t \cdots \cdots \cdots \text{전이방정식} \end{aligned}$$

상태공간모형의 추정은 주로 칼만필터(Kalman filter)를 이용하여 수행된다.¹²⁾ 칼만 필터 추정을 위해 몇 가지 표현들을 정의할 필요가 있다. $F_t = \sigma(\{y_s\}_{s=0}^t)$ 는 시그마대수(sigma field)로 시점 1부터 시점 t 까지 실현된 $\{y_s\}$ 를 통해 가용할 수 있는 정보들의 집합을 의미한다. $s_{s|t} = E(s_s | F_t)$, $\Omega_{s|t} = Var(s_s | F_t)$ 은 관측불가능한 s_t 의 조건부 평균과 분산을, $y_{s|t} = E(y_s | F_t)$, $\Sigma_{s|t} = Var(y_s | F_t)$ 은 관측가능한 y_t 의 조건부 평균과 분산을 나타낸다. 측정방정식과 전이방정식 상의 오차항들에 대한 결합분포는 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}\right)$$

즉, 오차항 u_t 와 v_t 는 다변량정규분포(multivariate normal distribution)를 따르고 두 오차항 간 독립을 가정하기에 공분산은 0과 같다.

칼만필터를 이용한 모형 추정과정은 초기화, 예측, 갱신, 평활화 단계로 구성된다. 첫 번째 초기화단계에서는 관측불가능한 s_t 와 그 분산에 대한 초기값을 다음과 같이 설정한다.

$$s_{0|0}, \Omega_{0|0}$$

두 번째 예측단계에서는 모형의 모수(parameter)를 안다는 가정하에 $t-1$ 기까지의 정보를 이용하여 t 기의 값들을 다음과 같이 예측한다.

$$\begin{aligned} s_{t|t-1} &= Bs_{t-1|t-1} \\ y_{t|t-1} &= As_{t|t-1} \end{aligned}$$

12) 시계열 분석에서 필터(filter)는 시차연산자(lag operator)의 함수로 시계열을 다른 시계열로 변환하는 역할을 수행한다.

$$\Omega_{t|t-1} = B\Omega_{t-1|t-1}B' + Q$$

$$\Sigma_{t|t-1} = A\Omega_{t|t-1}A' + R$$

이와 같은 예측과정에서의 결과식은 측정방정식과 전이방정식, 다변량정규분포의 조건부 평균과 조건부 분산으로부터 도출된다. 즉, $\{y_s\}_{s=0}^{t-1}$ 를 이용하여 $s_{t|t-1}$, $\Omega_{t|t-1}$ 를 측정한다.

세 번째 갱신단계에서는 $s_{t|t-1}$, $\Omega_{t|t-1}$ 를 이용하여 $s_{t|t}$, $\Omega_{t|t}$ 를 측정한다. 갱신과정 또한 정규분포 가정을 이용하여 결과식을 도출한다.

$$\begin{bmatrix} s_t \\ y_t \end{bmatrix} \Big| F_{t-1} \sim N \left(\begin{bmatrix} s_{t|t-1} \\ y_{t|t-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Omega_{t|t-1} & \Omega_{t|t-1}A' \\ A\Omega_{t|t-1} & \Sigma_{t|t-1} \end{bmatrix} \right)$$

또한, $s_{t|t} = E(s_t | F_t) = E(s_t | y_t, F_{t-1})$ 를 이용하여 다음의 결과식들을 도출할 수 있다.

$$s_{t|t} = s_{t|t-1} + \Omega_{t|t-1}A'\Sigma_{t|t-1}^{-1}(y_t - y_{t|t-1})$$

$$\Omega_{t|t} = \Omega_{t|t-1} - \Omega_{t|t-1}A'\Sigma_{t|t-1}^{-1}A\Omega_{t|t-1}$$

갱신단계는 예측오차($y_t - y_{t|t-1}$)를 반영하여 예측치를 업데이트하는 과정이다. 특히, $K_t = \Omega_{t|t-1}A'\Sigma_{t|t-1}^{-1}$ 는 칼만이득(Kalman gain)이라고 한다. 이를 반영하여 오차 분산의 기댓값을 최소화하는 것으로 추정과 측정으로부터의 오류를 줄여준다.

두 번째 예측단계에서는 모형의 모수를 안다고 가정하였으나 실제로는 그렇지 않기에 모수를 추정해야 한다. 칼만필터에서 모형의 모수는 최우추정(maximum likelihood estimation)을 바탕으로 추정한다. 오차항의 정규분포 가정을 이용하여 최우추정을 통해 모형의 모수를 추정할 수 있다. y_t 에 대한 조건부 분포(conditional distribution)는 다음과 같다.

$$y_t | F_{t-1} \sim N(y_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1})$$

이로부터 조건부 로그우도함수(loglikelihood function) $l_t(\theta)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$l_t(\theta) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\det\Sigma_{t|t-1} - \frac{1}{2}(y_t - y_{t|t-1})'\Sigma_{t|t-1}^{-1}(y_t - y_{t|t-1})$$

그리고 이를 바탕으로 다음과 같이 로그우도함수를 정의하고 최적화하여 모수를 추정

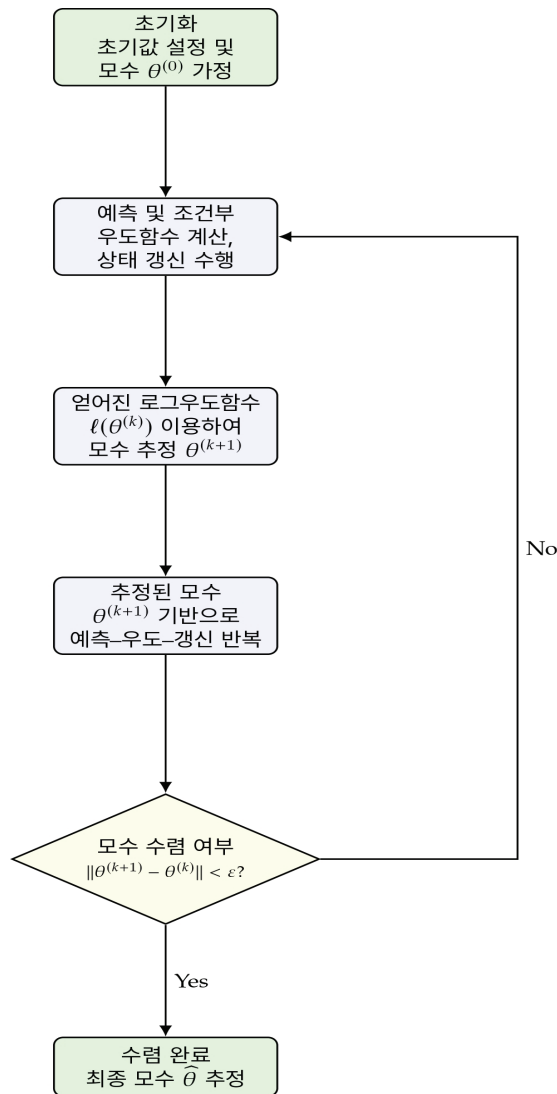
하게 된다.

$$L_t(\theta) = \sum_{s=1}^t l_s(\theta)$$

즉, 초기화단계부터 최우추정까지의 과정을 반복적으로 수행하여 모형을 추정할 수 있다.

[그림 4-4]는 상태공간모형의 추정과정을 나타낸다. 즉, 다음과 같은 과정을 통해 상태공간모형의 모수에 대해 추정한다고 할 수 있다.

[그림 4-4] 상태공간모형 추정과정



자료: 저자 작성

1. 초기화로 초기값을 설정하고 모수를 안다는 가정하에서 $t = 1$ 부터 T 까지 예측, 조건부 우도함수 계산, 갱신을 반복
2. 이를 통해 얻은 로그우도함수 $L_T^{(1)}(\theta)$ 를 이용하여 모수를 추정
3. 추정된 모수를 바탕으로 $t = 1$ 부터 T 까지 예측, 조건부 우도함수 계산, 갱신을 반복함.
4. 이를 통해 얻어진 로그우도함수 $L_T^{(2)}(\theta)$ 를 이용하여 모수를 추정
5. 추정된 모수를 바탕으로 $t = 1$ 부터 T 까지 예측, 조건부 우도함수 계산, 갱신을 수행하고 다시 모수를 추정

6. 이와 같은 과정을 추정된 모수가 수렴(converge)할 때까지 반복적으로 수행

칼만필터의 마지막 단계는 평활화이다. 평활화는 $\{y_t\}_{t=1}^T$ 가 주어진 상황에서 s_t 를 예측하는 과정이다. y_t 는 1부터 T 까지 가용한 것을 가정하면 $\{y_t\}_{t=1}^T$ 는 전체 관측가능한 y 의 값들을 의미한다. $E(s_t | s_{t+1}, F_T) = E(s_t | s_{t+1}, F_t)$ ¹³⁾과 정규분포 가정을 이용하여 다음 식을 도출할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} s_t \\ s_{t+1} \end{bmatrix} \Big| F_t \sim N \left(\begin{bmatrix} s_{t|t} \\ s_{t+1|t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Omega_{t|t} & \Omega_{t|t} B' \\ B \Omega_{t|t} & \Omega_{t+1|t} \end{bmatrix} \right)$$

$J_t = \Omega_{t|t} B^{-1} \Omega_{t+1|t}^{-1}$ 로 정의하면, $E(s_t | s_{t+1}, F_t) = s_{t|t} + J_t(s_{t+1} - s_{t+1|t})$ 가 되고 최종적으로 다음과 같은 결과식을 도출할 수 있다.

$$s_{t|T} = E(E(s_t | s_{t+1}, F_T) | F_T) = s_{t|t} + J_t(s_{t+1|T} - s_{t+1|t})$$

마찬가지로 이와 유사하게

$$\Omega_{t|T} = \Omega_{t|t} + J_t(\Omega_{t+1|T} - \Omega_{t+1|t})J_t'$$

임을 알 수 있다.

가장 일반적인 형태의 나우캐스팅 모형인 동적요인모형도 이와 같은 방법을 통해 추정하고 분석할 수 있다. 동적요인모형을 바탕으로 한 나우캐스팅은 많은 경제변수들을 공통적으로 설명할 수 있는 요인이 존재하는 것을 가정한다. 따라서 이 공통 요인을 찾을 수 있다면 이를 바탕으로 타겟 변수를 예측할 수 있다는 것이 핵심이다. 그러나 경제 변수들을 공통으로 설명할 수 있는 요인은 직접적으로 관측이 불가능하다. 따라서 상태공간모형을 이용하여 분석하게 된다.

$$x_t = A f_t + u_t$$

$$f_t = B f_{t-1} + v_t$$

x_t 는 관측이 가능한 경제변수, f_t 는 이들을 공통적으로 설명하는 요인을 나타낸다. 이러한 모형 구조는 앞서 소개한 일반적인 상태공간모형의 구조와 정확히 일치한다. $x_t = A f_t + u_t$ 는 측정방정식이다. 관측가능한 변수 x_t 를 관측이 불가능한 설명변수 f_t

13) $y_{t+k} = A(B^{k-1}s_{t+1} + T^{k-2}v_{t+2} + \dots + v_{t+k}) + u_{t+k}$ 를 이용하여 도출할 수 있다.

를 이용하여 설명하고자 하는 것이다. $f_t = Bf_{t-1} + v_t$ 는 전이방정식이다. 관측이 불가능한 f_t 의 동적 행태를 전이방정식을 통해 결정한다. 고차원 데이터의 문제에 해당하는 것은 공통 요인 f_t 를 어떻게 정의할 것인가와 관련있다. 이러한 공통 요인은 많은 수의 경제변수들로부터 정보를 축약하여 차원을 축소하기 때문이다. 요인 정의에는 다양한 방법이 존재한다. Stock and Watson(2003)의 경우 x_t 들 전체를 공통으로 설명할 수 있는 소수의 요인을 가정했다. 반면, Giannone et al.(2008)은 x_t 를 그 성격에 따라 여러 개의 블록(block)으로 구분하고 블록별로 1개의 요인만을 추출하는 방법을 제시했다.¹⁴⁾ 이러한 방법 등을 바탕으로 동적요인모형에서 데이터의 차원을 축약하여 나우캐스팅에 활용할 수 있다.

나. 베이지안 벡터자기회귀¹⁵⁾

베이지안 VAR 모형은 나우캐스팅에서 발생하는 차원의 저주 문제를 효과적으로 해결할 수 있는 방법론으로 주목받고 있다.¹⁶⁾ 베이지안 VAR은 다음과 같은 기본적인 VAR 형태를 가지나 미네소타 사전분포(Minnesota prior)와 같은 축소 사전분포(shrinkage prior)를 이용하여 모형을 추정한다.¹⁷⁾

$$Y_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} + \epsilon_t$$

가장 대표적인 축소 사전분포인 미네소타 사전분포는 Y_t 를 구성하는 각 변수가 임의 보행(random walk)임을 가정하여 첫 번째 자기시차 계수(1st autoregressive coefficient)는 1에 가깝게, 나머지는 0으로 축소하게 하고자 한다. 즉, 이는 시차가 멀어질수록 과거 변수가 현재 변수에 미치는 영향이 줄어드는 것을 가정한다.

14) 이는 뉴욕연방준비은행의 나우캐스팅 시스템으로 이에 대해서 IV장에서 다룬다.

15) 베이지안 방법론에 대한 자세한 설명은 강규호(2024)를 참고하기 바란다.

16) 베이지안 방법론은 이 외에도 정상성 가정에 민감한 고전적인 VAR 추정방법(OLS, MLE 등)과 다르다. 특히 미네소타 사전분포 등 축소 사전분포를 활용한다면 변수를 수준 그대로 VAR 모형에 반영해도 추정 에 문제가 되지 않는다. 이에 더해 예측에 있어 예측 분포 전체를 얻을 수 있어 예측의 불확실성을 쉽게 측정(Almuzara et al., 2023) 할 수 있는 등 최근 고차원 계량 모형을 이용한 시계열 예측에서 활용도가 매우 높다.

17) 베이지안 VAR에서 가장 많이 쓰이는 사전분포는 정규-위샤트 사전분포(normal-Wishart prior)일 것이다. 정규-위샤트 사전분포는 위와 같은 VAR에서 계수 A_p 는 정규분포, 오차항의 공분산 Σ 는 역위샤트(inverse Wishart) 분포를 가정한다. 이와 같은 사전분포는 VAR의 우도함수와 결합하면 사후분포(posterior)가 사전분포와 같은 공액(conjugate)이 되어 손쉽게 추정이 가능한 이점이 있다. 그러나 축소의 역할은 제한적이다. 본 보고서에서는 VAR에서 차원 축소에 초점을 맞추기 때문에 미네소타 사전분포를 중심으로 소개한다.

$$E(A_1) = I, E(A_2) = \dots = E(A_p) = 0$$

VAR 자기시차 계수 A 의 분산에 대해서는 다음과 같은 구조를 가정한다.

$$Var(A_k^{(i,j)}) = \lambda_1 \times \lambda_2 1\{i \neq j\} \times \frac{1}{k^{\lambda_3}} \times \frac{\sigma_i^2}{\sigma_j^2}$$

λ_1 은 전반적인 사전분포의 엄격함(tightness)을 조정한다. λ_1 이 0에 가까워지면 사전 분포를 완전 반영하게 되고 반대로 λ_1 이 ∞ 에 가까워지게 되면 일반적인 OLS를 바탕으로 VAR 자기시차 계수를 추정하는 것과 동일하게 된다. λ_2 는 자기 자신(i) 이외의 변수 (j)의 분산을 조정한다. λ_2 가 1에 가까워질수록 자기 자신과 자기 자신 이외의 변수 간 분산의 차이가 없음을 의미한다. λ_3 은 시차(lag)에 따라 분산이 감소하는 것을 조정하게 된다. 따라서 미네소타 사전분포에서는 전반적으로 시차가 멀고 자기 자신 이외 다른 변수들과의 교차항 계수를 사전 평균인 0으로 끌어들이며 축소를 수행하게 된다. 이러한 λ 들을 설정하는 방법에 대해 엄밀한 이론적 배경이 있는 것은 아니나 경험법칙(rule of thumb)으로 $\lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = 0.3$ (Litterman, 1986), $\lambda_3 = 2$ (Sims and Zha, 1998)와 같은 λ 들이 일반적으로 많이 사용된다.

2. 혼합 주기 문제

혼합 주기 문제를 해결하기 위한 방법으로는 상태공간모형, 교량방정식(bridge equation), MIDAS(mixed data sampling) 등이 나우캐스팅에서 주로 활용되고 있다.

가. 상태공간모형

나우캐스팅에서 가장 대표적인 상태 공간 모형인 동적요인모형을 바탕으로 한 국내총생산 나우캐스팅을 고려해 보자. 동적요인모형의 측정방정식($x_t = Af_t + u_t$) 상 x_t 에는 일반적으로 국내총생산을 비롯하여 여러 거시/금융변수들이 포함된다. 주기로는 분기별, 월별 변수들이 혼재되어 있는 것이다. 이러한 혼합 주기 문제는 저빈도(low frequency) 변수를 고빈도(high frequency) 변수로 변환하여 해결하는 것이 일반적이다. 분기별 변수를 월별로 변환하는 것이다.¹⁸⁾ Mariano and Murasawa(2003)는 상태공간모형을 바탕으로 분기별 변수를 월별 변수로 변환한다. 변환의 핵심 가정은 저빈도 분기별 변수(Y_t)가 관측되지 않는 고빈도 잠재(latent) 월별 변수(Y_t^*)로 표현 가능하다는 가정이다. Mariano and Murasawa(2003)는 저빈도 분기별 변수(Y_t)와 관측되지 않는 고빈도 잠재 월별 변수(Y_t^*)간 관계를 다음과 같이 가정한다.

$$\ln Y_t = \frac{1}{3} \left(\ln Y_t^* + \ln Y_{t-1}^* + \ln Y_{t-2}^* \right)$$

이는 분기별 변수가 해당 분기 내 잠재 월별 변수들의 기하평균(geometric mean)임을 가정한 것과 동일하다.¹⁹⁾

$$Y_t = \sqrt[3]{Y_t^* Y_{t-1}^* Y_{t-2}^*}$$

이러한 가정하에서 변화율은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\ln Y_t - \ln Y_{t-3} = \frac{1}{3} \left(\ln Y_t^* - \ln Y_{t-3}^* \right) + \frac{1}{3} \left(\ln Y_{t-1}^* - \ln Y_{t-4}^* \right) + \frac{1}{3} \left(\ln Y_{t-2}^* - \ln Y_{t-5}^* \right)$$

18) 물론 반대로 월별 변수를 분기별 변수로 변환하는 것도 가능하나 변환 과정에서 정보의 손실(information loss)이 발생하고 대부분의 설명변수가 월별 변수임을 감안하여 분기별 변수를 월별로 변환하는 것이 일반적이다.

19) 산술평균(arithmetic mean) 형태를 가정할 수 있으나 이러한 경우 최종적인 혼합주기모형이 비선형 형태를 가지게 되어 추정의 어려움이 발생할 수밖에 없다. 따라서 많은 연구는 기하평균 형태를 가정한다.

분기별 변화율을 $y_t = \Delta_3 \ln Y_t$, 잠재 월별 변화율을 $y_t^* = \Delta \ln Y_t^*$ 로 정의하면 변화율 결과식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{3}(y_t^* + y_{t-1}^* + y_{t-2}^*) + \frac{1}{3}(y_{t-1}^* + y_{t-2}^* + y_{t-3}^*) + \frac{1}{3}(y_{t-2}^* + y_{t-3}^* + y_{t-4}^*) \\ &= \frac{1}{3}y_t^* + \frac{2}{3}y_{t-1}^* + \frac{3}{3}y_{t-2}^* + \frac{2}{3}y_{t-3}^* + \frac{1}{3}y_{t-4}^* \end{aligned}$$

y_t^* 가 x_t 에 포함되어 있기에 측정방정식($x_t = Af_t + u_t$)을 바탕으로 $y_t^* = A_1f_t + u_{1t}$ 를 가정하면 다음 결과식이 도출된다.

$$\begin{aligned} y_t &= A_1\left(\frac{1}{3}f_t + \frac{2}{3}f_{t-1} + \frac{3}{3}f_{t-2} + \frac{2}{3}f_{t-3} + \frac{1}{3}f_{t-4}\right) \\ &\quad + \frac{1}{3}u_t + \frac{2}{3}u_{t-1} + \frac{3}{3}u_{t-2} + \frac{2}{3}u_{t-3} + \frac{1}{3}u_{t-4} \end{aligned}$$

이를 활용하여 분기별 변수의 성장률을 동적 요인을 통해 추정할 수 있게 된다.

나. 교량방정식

교량방정식은 분기별 지표와 월별 지표를 연결(bridge)하는 것으로 고빈도 데이터를 저빈도 변수 예측에 활용한다. 교량방정식은 회귀분석 기반 방법이다. 구체적으로는 다음과 같은 회귀식을 바탕으로 이루어진다.

$$y_t = \alpha + \beta(L)x_t^q + \epsilon_t$$

y_t 는 예측하고자 하는 변수의 분기 변화율을, x_t^q 는 월별 지표를 집계(aggregate)하여 생성한 분기별 지표이다. 즉, 이는 월별 지표를 분기별 지표로 변환하여 최종 예측 목표인 분기별 지표 예측에 활용하는 것이다. 그렇다면 월별 지표를 어떻게 집계하여 분기별 지표로 변환할 것인가에 대한 문제가 남아 있다. 월별 지표의 집계 방법은 주로 Stock and Watson (2002)의 방법을 따른다. Stock and Watson (2002)은 월별 지표의 성질에 따라 크게 세 가지 집계 방법을 제안했다. 먼저 월별 지표가 성장률 혹은 변화율인 경우에는 다음과 같이 변환한다.

$$x_t^q = x_t^m + 2x_{t-1/3}^m + 3x_{t-2/3}^m + 2x_{t-1}^m + x_{t-4/3}^m$$

이는 기본적으로 Mariano and Murasawa(2003)의 결과와 동일한 방식이다. 월별

지표가 유량(flow)이면 이들의 합으로 분기별 지표를 구성한다.

$$x_t^q = x_t^m + x_{t-1/3}^m + x_{t-2/3}^m$$

마지막으로 월별 지표가 저장(stock)이면 가장 최근시점의 월별 지표로 분기별 지표를 대체한다.

$$x_t^q = x_t^m$$

이를 바탕으로 각 월별 지표를 그 성질에 맞게 분기별 지표로 변환하여 예측에 활용한다.

다. MIDAS

MIDAS(Ghysels et al., 2006)은 교량방정식과 마찬가지로 분기별 지표와 월별 지표를 연결하는 방법이다. MIDAS도 회귀식을 바탕으로 하며 다음과 같이 구성된다.

$$y_t = \alpha + \beta_0 B(L; \theta) x_t^m + \epsilon_t$$

y_t, x_t^m 은 각각 분기 변화율과 월별 지표를 의미한다. B 는 가중함수(weighting function)로 베타함수(beta function) 등을 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$B(L, \theta) = \sum_{k=0}^K \beta(k; \theta) L^k$$

즉 월별 지표를 집계하는 방식이 아니라 다양한 가중치를 적용하여 월별 지표의 가중합을 바탕으로 분기별 지표를 만드는 과정이다. MIDAS는 월별 데이터를 직접 사용하고 데이터를 바탕으로 가중치를 추정한다는 점에서 교량방정식과 차이가 있다. 교량방정식은 월별 데이터를 분기별 데이터로 집계한 후 사용하며 분기별 지표로 집계할 때 고정된 가중치를 사용하기 때문이다.

3. 데이터 발표시점 문제

나우캐스팅에서는 각 변수의 발표시점이 달라 나우캐스팅에 활용하고자 하는 변수들의 관측치수가 시점마다 다른 문제가 발생한다. 이에 대한 해법으로는 상태공간모형을 이용한 방법과 단순하게 예측을 반복하는 방법이 있다.

상태공간모형에서 데이터가 발표되지 않으면 이를 결측치(missing observation)로 간주하여 EM(Expectation-Maximization) 알고리즘을 이용해 모형의 추정과 결측치에 대한 예측을 동시에 수행할 수 있다(Doz et al., 2012; Banbura and Modugno, 2014). EM 알고리즘은 상태공간모형을 추정하는 수치최적화 방법 중 하나이다. 이 중 Doz et al.(2012)의 EM 알고리즘은 상태공간을 축약해서 빅데이터에 활용 가능한 장점이 있어 나우캐스팅에 널리 활용되고 있다. 기본적으로 EM 알고리즘은 상태공간모형의 상태변수와 모수를 동시에 추정한다.

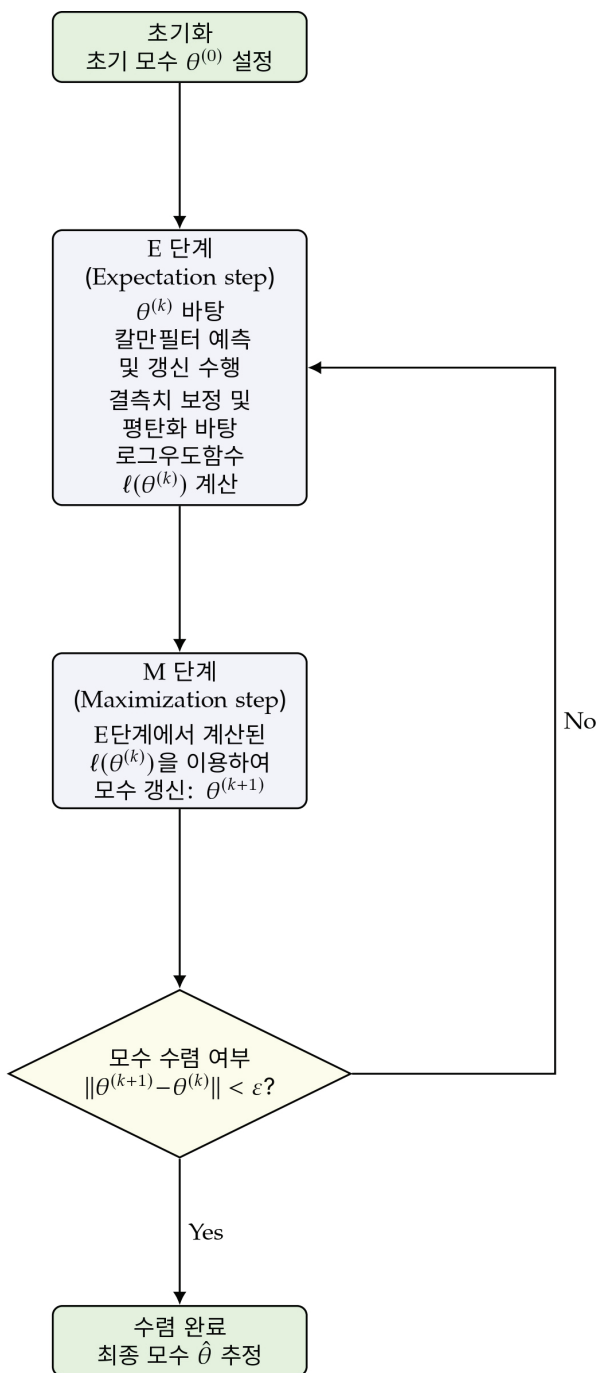
우선, 다음과 같이 관측가능한 y_t 와 s_t 가 결합한 형태의 우도함수를 고려한다.

$$\log p(s_{1:T}, y_{1:T} | \theta) = \sum_{t=1}^T \log p(s_t | s_{t-1}) + \sum_{t=1}^T \log p(y_t | s_t, \theta)$$

$\{y_t\}_{t=1}^T$ 이 주어진 상황에서 $\log p(s_{1:T}, y_{1:T} | \theta)$ 의 기댓값을 $\{s_t\}_{t=1}^T$, θ 에 대해 최대화하여 상태변수와 모수를 동시에 추정한다.

[그림 4-5]는 EM 알고리즘 추정과정을 나타낸다. EM 알고리즘의 추정과정은 E(expectation) 과정과 M(maximization) 과정으로 이루어진다. E 과정에서는 $\theta^{(j)}$ 가 주어졌을 때 이를 이용하여 로그우도함수를 계산한다. 즉, 이는 $E_{s|y} \log p(s_{1:T}, y_{1:T} | \theta)$ 의 구성요소를 계산하는 과정이다. 구체적으로는 칼만필터의 예측을 통해 결측치를 예측하고, 갱신과정에서는 결측치 없는 변수만을 이용한다. 그리고 평탄화과정을 통해 로그우도함수를 계산한다. 다음 M 과정에서는 E 과정에서 구한 로그우도함수를 바탕으로 모수 $\theta^{(j+1)}$ 를 새롭게 추정한다. 이와 같은 과정을 추정된 모수가 수렴할 때까지 반복한다. 이러한 EM 알고리즘은 칼만필터에 비해 상태공간모형 추정에 비해 초기값이 덜 민감하다는 특징이 있다. 이는 특히 적절한 초기값을 찾기 힘든 경우에도 모형을 안정적으로 추정할 수 있게 해준다. 또한 모형이 복잡하고 모수가 많은 경우에도 수치적으로 안정적인 추정치를 제공한다.

[그림 4-5] EM 알고리즘 추정과정



자료: 저자 작성

그 외 반복 예측은 단순하게 시계열 예측을 반복해서 수행하여 결측치를 대체한다. 먼저 1단계로 VAR, 동적요인모형 등 시계열 예측 모형을 바탕으로 아직 발표되지 않은 변수에 대한 예측을 수행한다. 2단계에서는 1단계 예측에서 얻은 예측치로 결측치를 대체한 후 다시 타겟 변수에 대한 예측을 수행한다. 즉, 1단계에서의 예측치를 결측치 대신 사용하여 모든 변수의 관측치 수를 동일하게 조정한 후 새롭게 예측을 수행하는 것이다.

4. 뉴욕연방준비은행 나우캐스트

뉴욕연방준비은행 나우캐스트는 가장 대표적인 나우캐스팅이라 할 수 있다. 뉴욕연방준비은행은 2016년 4월 “FRBNY Staff Nowcast”를 공개하였고, 지금까지 거의 매주 미국 국내총생산의 실시간 성장률 추정치를 제공하고 있다.²⁰⁾ 뉴욕연방준비은행 나우캐스트는 경제 전반에 걸쳐 지속적으로 발표되는 고빈도 자료를 바탕으로 나우캐스팅을 수행하여 공식 통계가 발표되기 전 현재의 경제상태를 추정하는 것을 목적으로 한다. [그림 4-4]는 실제 뉴욕연방준비에서 발표하는 2025년 3분기 미국 국내총생산 나우캐스트를 나타낸다.

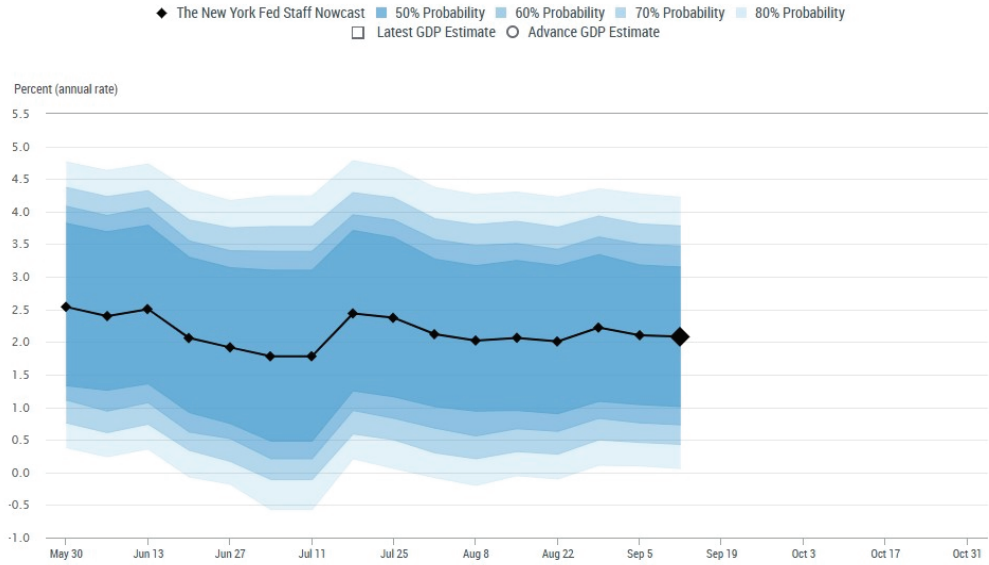
먼저 [그림 4-6]의 패널 (a)는 나우캐스트 예측치를 나타낸다. 5월 30일부터 매주 3분기 미국 국내총생산에 대한 나우캐스트를 공개하였다. 이를 바탕으로 미국 경제에 대한 판단이 시간에 따라 어떻게 달라졌는지를 확인할 수 있다. 5월 30일(2.54%) 첫 발표 이후 7월 11일(1.78%)까지 나우캐스팅 예측치는 하락하였다. 예측치의 변화는 새로운 데이터의 발표나 개정에 의해 이루어진다. [그림 4-6]의 패널 (b)는 예측치의 변화에 대해 설명한다. 예를 들어 나우캐스팅 예측치는 이 기간 중 6월 12일 2.50%에서 6월 20일 2.06%로 가장 크게 하락했다. 전체 하락폭 -0.44%p 중 소비로 인한 하락폭이 -0.16%p, 연성변수로 인한 하락폭이 -0.13%p, 건설로 인한 하락폭이 -0.09%p, 생산으로 인한 하락폭이 -0.05%p에 의해서였다. 이와 관련된 변수가 발표되기 전 예측치를 바탕으로 나우캐스팅을 수행하는데 실제 발표된 값들이 예측치를 하회하여 나우캐스팅 예측치가 낮아지게 된 것이다. 7월 18일(2.44%) 이후에는 다시 예측치가 상승한 이후 9월 12일(2.08%)까지 2% 초반대 성장률을 예상한다.

20) 코로나19 팬데믹 시기에 발표를 중단하기도 하였으나 기존 뉴욕연방준비은행의 나우캐스트를 개선한 나우캐스트 2.0을 2023년 9월 공개하면서 현재까지 계속 국내총생산의 실시간 성장률 추정치를 제공하고 있다.

[그림 4-6] 뉴욕연방준비은행 나우캐스트(2025년 3분기)

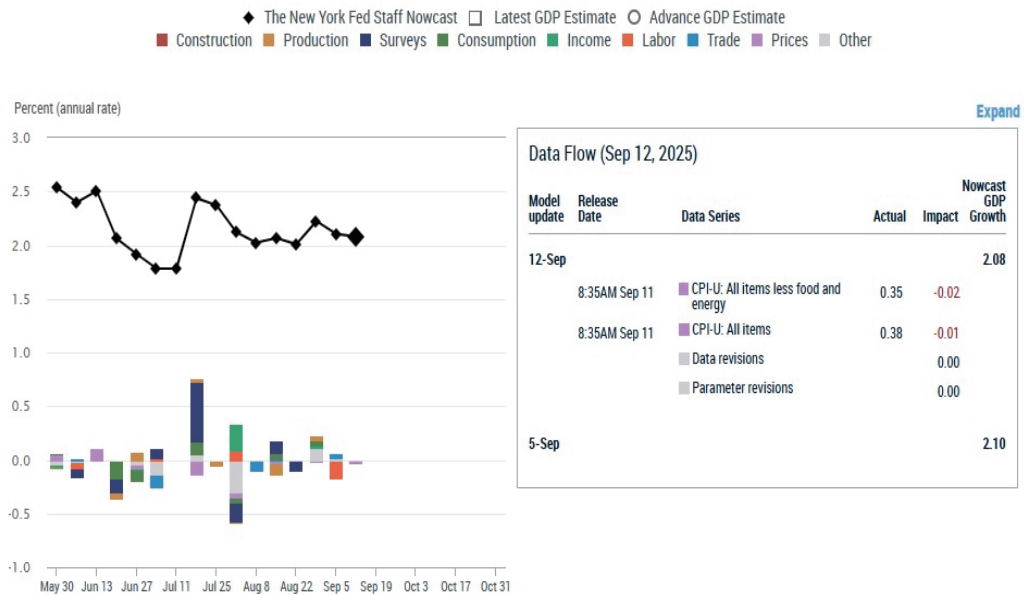
(a) 나우캐스트 예측치

New York Fed Staff Nowcast



(b) 예측치 변화 분해

Impact of Data Releases



자료: 뉴욕연방준비은행, The New York Fed Staff Nowcast 2025:Q3, <https://www.newyorkfed.org/research/policy/nowcast/#nowcast/2025:Q3>, 검색일자: 2025.9.15.

뉴욕연방준비은행의 나우캐스팅 모형(Bok et al., 2018)은 기본적으로 동적요인모형을 바탕으로 고차원 데이터의 문제에 접근한다. 혼합 빈도 문제와 발표시점 차이의 문제는 상태공간모형을 통해 이를 극복한다. 기본적으로 뉴욕연방준비은행 나우캐스트는 다음과 같은 동적요인모형을 기반으로 한다.

$$\begin{aligned}x_t &= Af_t + u_t \\f_t &= Bf_{t-1} + v_t\end{aligned}$$

이는 앞서 소개한 동적요인모형의 일반적 형태이다. x_t 는 관측가능한 경제변수, f_t 는 이들을 공통적으로 설명하는 요인이다. 측정방정식($x_t = Af_t + u_t$)을 통해 관측가능한 변수 x_t 를 관측이 불가능한 요인 f_t 를 이용하여 설명한다. 그리고 전이방정식($f_t = Bf_{t-1} + v_t$)을 통해 관측이 불가능한 f_t 의 동적 행태를 결정한다. 전이방정식에서 기본적으로 요인들은 각각 독립적인 AR(1) 과정을 따른다고 가정한다. 여기서 계수행렬 B 는 모형 식별(identification)을 위해 대각행렬(diagonal matrix)로 가정한다.

동적요인모형에서 공통 요인 f_t 를 어떻게 정의할 것인가는 매우 중요한 문제이다. 뉴욕연방준비은행의 모형에서는 전체 거시변수를 4개의 블록으로 구분하고 각 블록별 1개의 요인을 가정한다. 즉, 총 4개의 요인을 이용하게 된다. 첫 번째 요인은 글로벌 요인(global factor)이다. 이 요인은 모형에서 이용하는 모든 변수를 공통으로 설명할 수 있는 요인이다. 두 번째 요인은 연성 요인(soft factor)이다. 이 요인은 소비자심리지수 등 조사를 바탕으로 한 연성변수(soft variable)들을 공통으로 설명할 수 있는 요인이다. 세 번째 요인은 실물 요인(real factor)이다. 실물 요인은 경기와 관련 변수들에 공통으로 존재하는 요인이다. 마지막으로 노동 요인(labor factor)을 고려한다. 이는 마찬가지로 노동시장 관련된 변수들의 공통 요인이다. 이러한 구조를 바탕으로 관측방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x_t^G \\ x_t^S \\ x_t^R \\ x_t^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{G,G} & 0 & 0 & 0 \\ A_{G,S} & A_{S,S} & 0 & 0 \\ A_{G,R} & 0 & A_{R,R} & 0 \\ A_{G,L} & 0 & 0 & A_{L,L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_t^G \\ f_t^S \\ f_t^R \\ f_t^L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_t^G \\ u_t^S \\ u_t^R \\ u_t^L \end{pmatrix}$$

관측방정식을 풀어보면 글로벌 요인은 모형 내 모든 변수를 공통으로 설명하기 때문에 모든 변수들이 이 요인에 대해 0이 아닌 계수를 갖게 된다. 가령 예를 들어 연성변수 x_t^S 는 다음과 같이 글로벌 요인과 연성 요인, 두 요인에 의해 설명되고 모형 내 변수 중

연성, 실물, 노동시장 관련 변수가 아닌 경우에는 글로벌 요인에 의해서만 설명되는 것으로 모형화한다.

$$x_t^G = A_{G,G}f_t^G + u_t^G$$

$$x_t^S = A_{G,S}f_t^G + A_{S,S}f_t^S + u_t^S$$

개별 오차항들은 AR(1) 과정을 따른다고 가정한다. 모형에서 예측하고자 하는 변수인 미국 실질 국내총생산 성장률은 다음과 같이 글로벌 요인과 실물 요인으로만 예측한다.

$$y_t^* = a_{G,y}f_t^G + a_{R,y}f_t^R + u_t^y$$

y_t^* 는 국내총생산 성장률의 월별 잠재변수로 관측이 불가능하다. 모형에서는 상태공간 모형을 통해 이를 추정한 후 다음과 같이 분기 변화율로 변환한다.

$$y_t = \frac{1}{3}(y_t^* + y_{t-1}^* + y_{t-2}^*) + \frac{1}{3}(y_{t-1}^* + y_{t-2}^* + y_{t-3}^*) + \frac{1}{3}(y_{t-2}^* + y_{t-3}^* + y_{t-4}^*)$$

$$= \frac{1}{3}y_t^* + \frac{2}{3}y_{t-1}^* + \frac{3}{3}y_{t-2}^* + \frac{2}{3}y_{t-3}^* + \frac{1}{3}y_{t-4}^*$$

이와 같은 상태공간모형은 결측치를 대체하기 위해 EM 알고리즘을 바탕으로 추정한다.

5. 국내총생산 나우캐스팅

이제 앞서 소개한 나우캐스팅 방법을 바탕으로 실제 우리나라 국내총생산에 대한 나우캐스팅을 수행해 보자. 본 보고서에서 실증 분석에 활용한 방법은 다수의 나우캐스팅 모형의 근간이라고 할 수 있는 뉴욕연방준비은행의 나우캐스트 1.0을 바탕으로 한다.²¹⁾

나우캐스팅에 설명변수로 활용되는 월별 거시/금융변수로는 전산업생산지수, 실업률, 소비자동향조사 등을 포함한 45개 지표를 선정하였다. 이러한 지표는 미국 세인트루이스 연방준비은행(Federal Reserve Bank of St. Louis)의 FRED-MD(McCracken and Ng, 2016)를 바탕으로 선정하였다. FRED-MD는 미국 거시경제 분석에 유용한 월별 변수 134개로 구성되어 있다. 이러한 미국의 데이터와 대응하는 우리나라의 데이터를 수집하여 총 40개의 월별 지표로 데이터셋을 구성하였다.

이러한 월별 지표와 나우캐스팅 예측 타겟 지표인 분기별 국내총생산(실질, 계절조정)

21) 실제 우리나라 국내총생산 나우캐스팅에 관한 많은 연구가 뉴욕연방준비은행 나우캐스트 1.0을 바탕으로 하고 있다. (이현창 외, 2022; 김영민, 2024; 정규철 외, 2024)

을 포함하여 가상의 빈티지(pseudo vintage) 셋을 구성하였다. 나우캐스팅에서는 특정 시점에 가용한 데이터셋을 빈티지셋이라 부른다. 가령 예를 들어 2025년 11월 13일의 빈티지셋은 2025년 11월 13일 시점에서 가용한 데이터들의 집합이다. 2025년 11월 13일의 빈티지셋은 2025년 11월 30일의 빈티지셋과는 다를 수 있다. 빈티지셋이 달라지는 이유는 크게 두 가지이다. 첫 번째는 데이터가 개정되어 값이 변하는 경우, 두 번째는 새로 데이터가 발표되는 경우이다. 예를 들어 2025년 11월 13일에는 2025년 10월 전산업생산지수가 가용하지 않다. 국가데이터처에서는 익월 마지막 주에 산업활동 동향을 발표하기 때문이다. 그러나 말일인 2025년 11월 30일에는 2025년 10월 전산업생산지수가 발표되기 때문에 이를 활용할 수 있다. 또한 2025년 10월 마지막 주에 발표되었던 2025년 9월 전산업생산지수가 수정되는 경우, 2025년 11월 13일 빈티지셋의 2025년 9월 전산업생산지수와 2025년 11월 30일 빈티지셋의 2025년 9월 전산업생산지수는 다를 것이다. 2025년 11월 30일의 빈티지셋은 이러한 수정이 반영되기 때문이다. 따라서 가장 이상적인 것은 정기적으로 데이터셋을 수집하는 것을 시스템화하여 완전한 빈티지셋을 구축하여 이를 바탕으로 나우캐스팅을 수행하는 것이다. 그러나 이러한 데이터셋을 구축하는 것에는 많은 어려움이 따른다. 특히, 이미 지난 과거에 대해서는 빈티지셋을 구축하지 않았다면 과거 시점의 빈티지셋을 구하는 것은 불가능하다. 따라서 완전한 방법은 아니지만 월별 지표들의 발표 시점을 바탕으로 가상의 빈티지셋을 구축하고 이를 바탕으로 나우캐스팅을 수행하였다.²²⁾ 구체적으로는 나우캐스팅을 주 1회 수행한다는 가정하에서 한달을 4주로 가정하였다.

〈표 4-2〉는 나우캐스팅에 활용된 월별 거시/금융 지표와 이들의 발표시점을 나타낸다. 발표시점의 t 는 월, w 는 주를 의미한다. 예를 들어, 실업률의 경우 발표시점이 $t+1, w_2$ 로 표시되어 있다. 이는 예를 들어, 10월 실업률은 11월 둘째주에 발표됨을 의미한다.²³⁾

이와 같은 변수들을 이용하여 국내총생산 예측을 위한 다양한 변수 조합을 검토하였고 최종적으로 〈표 4-3〉에 제시된 총 11개의 변수를 선택하여 나우캐스팅을 수행하였다.²⁴⁾ 뉴욕연방준비은행은 실물, 연성, 노동으로 요인으로 거시변수를 블록화하여 요인을 추출하였다. 그러나 우리나라 국내총생산 예측에 있어 금융 관련 변수들로부터 요인을 추출하는 경우 예측력이 높아져 분석에서는 실물, 연성, 금융 세 블록을 정의하고 블

22) 이는 과거시점의 빈티지셋을 모두 구할 수 없는 현실에서 가능한 최선의 방법으로 판단된다.

23) 월별 지표보다 고빈도로 집계되는 금융변수들(주가, 환율 등)도 분석에 포함하였다. 이들은 월말값을 바탕으로 월별 변수로 가정하여 이용하였다.

24) 변수 선별을 위해 각 변수 조합별로 평균제곱예측오차를 구하고 이를 최소화하는 변수들의 조합을 최종 조합으로 선택하였다.

특별로 하나의 요인을 추출하였다. 예측 목표 지표는 국내총생산의 전분기대비 증감률 이고, 이는 뉴욕연방준비은행과 같이 글로벌 요인에 의해서만 설명된다고 가정하였다.

〈표 4-2〉 나우캐스팅에 활용된 월별 거시/금융변수(총 45개)

데이터	발표기관	발표시점
CP(91일)	한국은행	t, w4
Dollar Index	한국은행	t, w4
KOSPI	한국거래소	t, w4
KOSPI PER	한국거래소	t, w4
KOSPI 배당수익률	한국거래소	t, w4
광공업생산지수	국가데이터처	t+1, w4
국고채(1년, 5년, 10년)	한국은행	t, w4
국내공급물가지수	한국은행	t, w4
기업경기실사지수(업황전망, 매출전망)	한국은행	t, w4
기업자금조달현황	한국은행	t+1, w2
소매판매액	한국은행	t+1, w4
소비자동향조사(소비자심리지수, 소비자출전망)	한국은행	t, w4
소비자물가지수	국가데이터처	t+1, w1
소비지출전망	한국은행	t, w4
신규채용	고용노동부	t+1, w4
실업률	국가데이터처	t+1, w2
실업자수(3개월 미만, 3-6개월, 6-12개월, 12개월 이상)	국가데이터처	t+1, w2
유가증권 산업별 시가총액(금융업, 은행)	한국거래소	t+1, w2
전산업생산지수	국가데이터처	t+1, w4
전체임금총액	국가데이터처	t+2, w4
제조업가동률지수	국가데이터처	t+1, w4
제조업생산능력지수	국가데이터처	t+1, w4
제조업생산지수	국가데이터처	t+1, w4
주택건설인가실적	국토교통부	t+1, w4
주택건설착공실적	국토교통부	t+1, w4
주택매매가격지수	한국부동산원	t+2, w2
지급준비액	한국은행	t+1, w2
취업자수	국가데이터처	t+1, w2
콜금리(1일)	한국은행	t, w4
혼인건수, 출생아수	국가데이터처	t+2, w4
환율(원/달러, 원/위안, 원/일본엔, 원/유로)	한국은행	t, w4
회사채(3년 AA-, BBB-)	한국은행	t, w4

주: 발표시점 t는 월, w는 주를 의미

자료: 저자 작성

〈표 4-3〉 나우캐스팅 예측 활용 월별 거시/금융변수(총 11개)

데이터	발표시점	실물	연성	금융
소비자물가지수	t+1, w1	○		
실업률	t+1, w2	○		
주택건설인허가실적	t+1, w4	○		
전산업생산지수	t+1, w4	○		
기업경기실사지수 (매출전망)	t, w4		○	
소비자동향조사 (소비자심리지수, 소비자출전망)	t, w4		○	
기업자금조달 현황	t+1, w2			○
KOSPI	t, w4			○
콜금리(1일)	t, w4			○
환율(원/달러)	t, w4			○

주: 발표시점 t는 월, w는 주를 의미
자료: 저자 작성

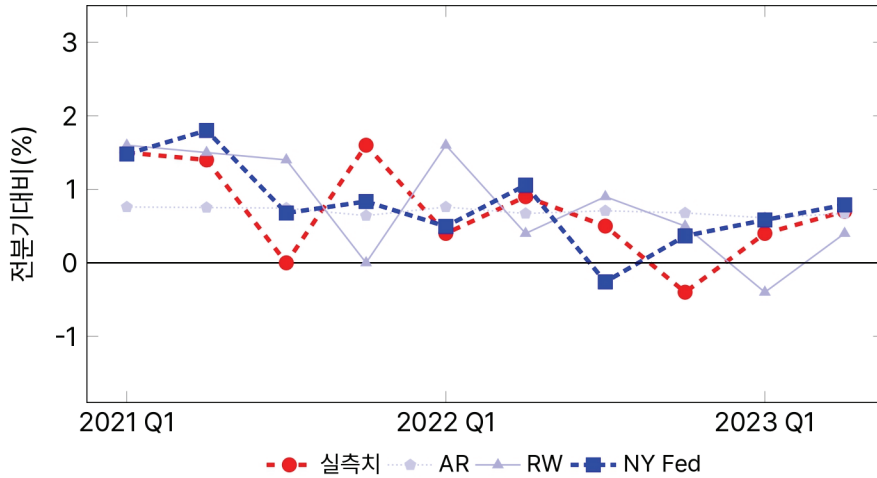
[그림 4-7]은 2021년 1분기부터 2023년 2분기까지 국내총생산 나우캐스트를 나타낸다. 그림상의 빨간색 점선은 실제 국내총생산의 전분기 대비 증감률, 파란색은 나우캐스트 예측치를 나타낸다.[그림 4-7]의 나우캐스트는 각 분기 최종 예측치를 의미한다. 본 보고서에서는 주 1회 나우캐스팅을 수행함을 가정하였다. 즉, 실제 국내총생산에 대한 나우캐스트 예측치는 매 분기가 시작하는 주부터 분기가 종료되는 주까지 매주 약 12개의 나우캐스트 예측치를 구하게 된다. 이 중 가장 마지막 시점의 예측치를 최종 예측치로 선택하였다.²⁵⁾

나우캐스트 예측치는 실제값과 벗어나는 경우도 있으나 전반적으로 경기흐름을 잘 포착하고 있는 것을 확인할 수 있다. 기존 전통적인 시계열 모형인 자기회귀(autoregressive) 모형이나 임의보행(random walk) 모형과 비교했을 때도 나우캐스트 모형의 예측력이 더 우수함을 확인할 수 있다. 특히 나우캐스트 모형의 경기 변화 방향에 대한 예측력은 상당히 높게 나타났다. 예측을 수행한 기간 동안 2021년 2분기를 제외하고 경기변화 방향에 대한 예측은 모두 맞게 나타났다. 반면 자기회귀 모형의 경우 정상성(stationarity)에

25) 실제 분기별 국내총생산의 경우 분기 종료 후 그 다음 달 마지막 주에 속보치가 발표된다. 이를 반영하여 나우캐스트 예측치를 산출하였다. 구체적으로 예를 들어 2022년 2분기의 경우 2022년 7월 넷째주에 속보치가 발표된다. 따라서 2022년 7월 셋째주의 예측치를 2022년 2분기 국내총생산의 최종 예측치로 선택하였다. 마찬가지로 2022년 1분기 국내총생산이 2022년 4월 넷째주에 발표된다. 따라서 2022년 4월 넷째주의 나우캐스트 예측치는 2022년 2분기 국내총생산의 첫 예측치가 된다.

기반하여 평균회귀(mean reverting)하는 모습을 보여 경기변화를 포착하기에는 한계가 존재한다. 이러한 결과는 전통적인 시계열 모형에 비해 다양한 데이터를 바탕으로 한 나우캐스팅 모형이 경기를 실시간으로 포착하는 데 유용할 수 있음을 시사한다.

[그림 4-7] 국내총생산 나우캐스트(2021년 1분기~2023년 2분기)



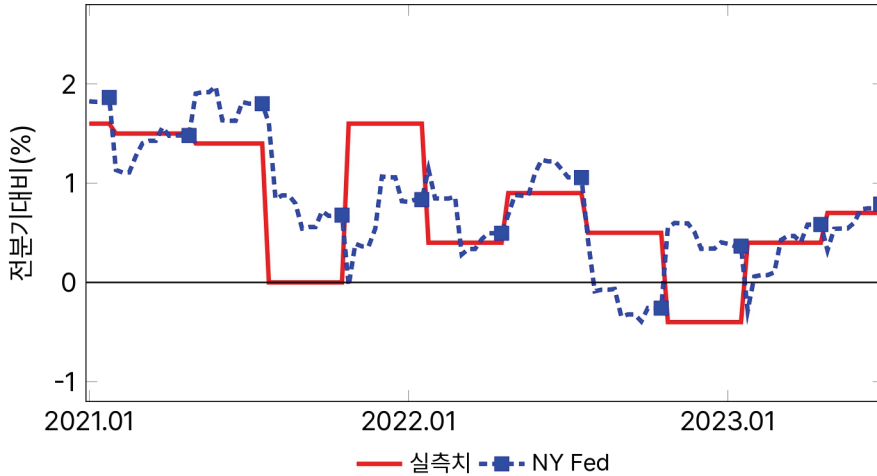
자료: 저자 작성

[그림 4-8]은 2021년 1월 첫째주부터 2023년 6월 넷째주까지 수행한 주별 나우캐스팅 결과를 나타낸다. 그림상에서 파란색 네모로 표시된 점들은 해당 분기의 최종 예측치를 의미한다. 그림상에서 볼 수 있듯이 주별 나우캐스팅 값은 설명에 활용하는 데이터가 변화함에 따라 예측치도 변화하는 것을 확인할 수 있다. 이러한 주별 변동을 보았을 때 주별 변동이 급격하게 변화하지 않는 것은 해석상의 이점을 가질 수 있다. 나우캐스팅은 실시간 경기 모니터링을 위해서 주로 활용되는데 주별 나우캐스팅 예측값이 굉장히 변동이 심하다면 이를 바탕으로 경기에 대한 정확한 판단을 내리기 어렵기 때문이다.²⁶⁾ 또한 나우캐스트 값이 분기 초기에 비해 분기 말에 갈수록 실제값에 가까워지는 것을 확인할 수 있다. 이는 나우캐스팅 모형을 비롯한 일반적인 시계열 예측 모형의 성질이다. 분기 말은 분기 초에 비해 가용한 정보의 양이 더 크다. 이는 정보집합이 더 커짐을 의미한다. 따라서 더 큰 정보집합 하에서의 예측은 일반적으로 더 우수한 편이다. 또한, 분

26) 예를 들어, 특정 주에는 국내총생산이 증가할 것으로 예상했다가 한 주 뒤에는 감소할 것으로 예상하는 등 예측치의 안정성이 낮다면 이는 정책입안자의 경기판단에 유용한 정보를 제공할 수 없다. 따라서 나우캐스팅 주별 예측치는 안정적인 것이 선호된다.

기 첫 예측값은 실제값과는 어느 정도 차이가 발생하고 있지만 곧 2-3주 뒤에는 예측치가 실제값에 보다 가까워지는 것을 확인할 수 있다. 이는 해당 분기에 대한 가용한 정보가 어느 정도만 누적되어도 충분히 신뢰성 있는 예측치를 제공하고 있는 것이라 볼 수 있다.

[그림 4-8] 국내총생산 나우캐스트(2021년 1월 첫째주~2023년 6월 넷째주)



자료: 저자 작성

마지막으로 예측력을 비교하기 위해 표본제곱오차를 바탕으로 예측력에 대한 검정을 수행하였다. 예측력 검정은 GW 검정을 이용하였다.²⁷⁾ 분석을 위해 분기 초, 분기 중(분기 초 이후 1개월 경과 시점), 분기 말의 나우캐스팅 예측치를 기존 시계열 모형의 예측치와 비교하였다. <표 4-4>는 이와 같은 검정 결과를 나타낸다.

<표 4-4> 예측력 비교(평균제곱오차)

구분	AR	RW	NY Fed
분기 초	0.38	0.79***	0.78
분기 중	0.38	0.79***	0.27
분기 말	0.38*	0.79***	0.24

주: * <0.1 , ** <0.05 , *** <0.01

자료: 저자 작성

27) DMW 검정을 사용한 경우에도 결과는 강건하게 나타났다.

분석 결과 분기 첫 나우캐스팅 예측치의 경우 예측력이 기존 시계열 모형에 비해 우월하지 않지만 1개월 경과 후 예측치부터는 예측력이 기존 모형들보다 우수한 것을 확인할 수 있다. 특히, 매 분기 1개월 경과 후 예측치를 자기회귀모형의 예측치와 비교했을 때 통계적으로 유의하지는 않았으나 평균제곱오차는 상당히 줄어들었다. 이와 같이 시간에 따른 예측력 개선은 분기 말까지 이어진다. 분기 말에는 나우캐스팅 모형의 예측력이 다른 모형에 비해 우월하고 그 차이도 통계적으로 유의한 것으로 나타났다.

물론 경제학에서의 모든 모형이 그렇듯, 모든 나우캐스팅 모형은 완벽하지 않다. 실제 최근 코로나19 팬데믹 시기에 뉴욕연방준비은행의 동적요인모형 기반 나우캐스팅 모형 예측력이 상당히 하락하는 문제가 발생하였다. 이는 시계열 데이터의 특징과 관련 있다. 일반적인 나우캐스팅의 타겟 변수인 국내총생산 성장률의 이상적인 시계열 형태는 정상성(stationarity) 시계열이다. 그러나 코로나19 팬데믹과 같이 예상치 못한 강한 충격이 발생했을 때 경제여건이 변화하면서 이러한 시계열의 동적 움직임이 비정상성(nonstationarity) 시계열에 가깝게 변화했다. 일반적인 정상성 시계열 가정을 바탕으로 모형화된 기존 뉴욕연방준비은행 나우캐스트 1.0은 이에 따라 예측력이 급격히 감소하였고 이에 잠시 예측치 발표를 중단하기도 하였다.

이에 따라 최근 나우캐스팅 모형은 시계열적으로 비정상성 시계열의 특성을 반영할 수 있는 모형으로 발전을 도모하고 있다. Antolin-Diaz et al.(2017; 2024)은 나우캐스팅 모형에 추세(trend)를 반영하고 이상치(outlier)를 고려하였다. 뉴욕연방준비은행도 Antolin-Diaz et al.(2017; 2024)을 바탕으로 최근 나우캐스트 2.0으로 업데이트하였다. 나우캐스트 1.0과 비교해 달라진 점을 모형 측면에서 간단히 살펴보자. 나우캐스트 2.0도 상태공간모형인 동적요인모형을 기반으로 하나 모형이 소폭 변형되었다. 모형은 다음과 같이 측정방정식과 전이방정식으로 구성된다.

$$x_t = a g_t + A f_t + u_t$$

$$f_t = B f_{t-1} + v_t$$

주목할 만한 것은 전이방정식에 추가된 g_t 이다. g_t 는 장기추세(long-run trend)이다. 장기 추세를 전이방정식에 추가로 고려하여 거시변수들의 평균이 코로나19 팬데믹 등 경제적 충격으로 시간에 따라 변화하게 되는 것을 포착한다. 또한 오차항인 u_t, v_t 는 기존의 정규분포 가정에서 벗어나 시변 변동성(time-varying volatility)과 이상치(outlier)를 고려하였다. 이는 경제 내에 극단적인 충격이 발생하여 거시변수가 굉장히 이례적인 값을 가지더라도 이를 나우캐스팅에 반영하기 위함이다. 또한 모형에 대한 추

정은 복잡성이 증대된 만큼 베이지안 방법론을 바탕으로 이루어진다. 이는 우리 경제 나우캐스팅에 대해서도 중요한 시사점을 가진다. 현재는 코로나19 팬데믹 시기보다는 경제가 급변하지 않는 시기이다. 이 시기에는 기존 전통적인 나우캐스팅 모형을 활용하여도 유의미한 예측력을 가질 수 있을 것이다. 그러나 예상치 못한 경제충격으로 경기가 급변하는 상황이 되면 고전적인 나우캐스팅 모형의 예측력은 하락할 수밖에 없다. 따라서 이런 충격을 조기에 식별하고 이를 바탕으로 정확한 실시간 모니터링을 수행할 수 있는 나우캐스팅 모형이 필요하다. 이를 위해서는 예측력을 더 높이기 위한 노력이 지속적으로 필요하다.

IV

결론

본 보고서에서는 시계열 예측 과정을 간략히 소개하고 최근 가장 주목받고 있는 나우캐스팅을 중심으로 방법론과 실제 적용 사례를 소개하였다. 특히 나우캐스팅을 위해서 해결해야 할 문제들을 소개하고 기존 연구들이 어떠한 방법을 통해 이를 해결하였는지를 중심으로 논의하였다. 나우캐스팅은 특히 고차원 데이터 분석과 깊은 연관이 있다. 머신러닝과 딥러닝 등 다양한 인공지능 기법과 계량경제학, 통계학이 결합하면서 고차원 데이터 분석에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. 이에 따라 나우캐스팅 예측 모형도 빠르게 발전하고 있으나 본 보고서에서는 나우캐스팅 모형의 가장 근간이 되는 모형들을 중심으로 검토하였다.

보고서에서 소개한 나우캐스팅을 실제 적용하는 사례로 우리나라의 국내총생산에 대한 나우캐스팅을 수행하였다. 동적요인모형을 기반으로 한 뉴욕연방준비은행의 나우캐스팅 모형을 바탕으로 국내총생산에 대한 나우캐스팅을 수행한 결과, 나우캐스팅의 예측력이 전통적인 시계열 모형에 비해 높고 정책에 활용 가능성이 높음을 확인할 수 있었다.

정교한 시계열 예측과 이를 바탕으로 한 판단은 정책입안자에게 필수적이다. 이는 비단 경기흐름에 대한 모니터링뿐만 아니라 노동시장에 대한 상황 판단이나 조세수입 흐름에 대한 모니터링 등 경제 다방면 분야에서 활용될 수 있다. 이렇게 예측치를 실제 정책집행에 대한 보조자료로 활용하기 위해서는 무엇보다 정확한 예측을 수행하는 것이

필요하다. 이를 위해서는 ① 정확한 예측 모형과 ② 다양한 데이터의 활용이 필수적이다. 예측 모형의 발전 방향에 대해서는 최근 나우캐스팅 모형의 발전 방향을 참고할 필요가 있다. 최근 나우캐스팅 모형은 인공지능 기법과 계량경제학을 결합하고 있다. 특히 인공지능 기법이 비선형 관계를 중점으로 두고 있다는 점에서 이는 변수 간의 동적 흐름을 비선형화하여 예측에 활용하는 방안이라고 볼 수 있을 것이다. 이와 함께 시계열 데이터의 비정상성을 예측에 반영하는 방안도 활발히 이루어지고 있다. 이러한 방향으로의 발전을 통해 모형의 예측력을 제고할 수 있을 것으로 기대된다. 다음은 다양한 빅데이터의 활용이다. 이를 위해 많은 연구는 기존에 활용되지 않았던 데이터들을 분석과 예측에 활용하고 있다. 가령 예를 들어 민간기업의 구인·구직 일자리 수, 스캐너 데이터 등을 이용하거나 선박자동식별장치(AIS)나 인공위성 데이터 등도 활용하여 예측에 활용하고 있다. 이러한 데이터 활용을 위해서는 보다 폭넓은 데이터가 연구에 활용될 수 있도록 환경을 구축할 필요가 있다고 생각한다. 이를 위해서는 기본적인 시계열 예측 과정과 나우캐스팅 모형에 대한 이해가 도움이 될 것이다. 본 보고서가 시계열 예측을 수행하고자 하는 연구자들에게 도움이 되길 바란다.

참고문헌

- 강규호. 『베이지안 계량경제학』, 박영사, 2024.
- 김영민. 「Deep learning 방법을 활용한 거시지표 nowcasting 모형」, 박사학위논문, 서울대학교, 2024.
- 이현창, 최동규, 김용건. 동적요인모형과 딥러닝 알고리즘을 결합한 당분기 경제전망(GDP nowcasting) 시스템 개발. *경제분석*, 2022, pp.1~37.
- 정규철, 김미루, 이승희, 이상규. 빅데이터를 활용한 실시간 경기 진단과 예측을 위한 시스템 구축, 기획재정부 연구용역보고서, 2024.
- 한희준. 『머신러닝과 경제·금융 시계열 예측: R과 Python을 활용한 실습 중심 입문서』, 자유아카데미, 2025.
- Almuzara, M., Baker, K., O’Keeffe, H., & Sbordone, A., *The New York Fed Staff Nowcast 2.0*, New York Fed Staff Nowcast Technical Paper, 2023.
- Antolín-Díaz, J., Drechsel, T., & Petrella, I., “Tracking the slowdown in long-run GDP growth,” *Review of Economics and Statistics*, 99(2), 2017, pp. 343~356.
- Antolín-Díaz, J., Drechsel, T., & Petrella, I., “Advances in Nowcasting Economic Activity: The Role of Heterogeneous Dynamics and Fat Tails,” *Journal of Econometrics*, 238(2), 2024, Article 105634.
- Bok, B., Caratelli, D., Giannone, D., Sbordone, A. M., & Tambalotti, A., “Macroeconomic nowcasting and forecasting with big data,” *Annual Review of Economics*, 10(1), 2018, pp. 615~643.
- Clark, T., & McCracken, M., “Advances in forecast evaluation,” in *Handbook of Economic Forecasting*, Vol. 2, 2013, pp. 1107~1201.
- Diebold, F. X., & Mariano, R. S., “Comparing predictive accuracy,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 13(3), 1995, pp. 253~263.
- Doz, C., Giannone, D., & Reichlin, L., “A quasi-maximum likelihood approach for large, approximate dynamic factor models,” *Review of Economics and Statistics*, 94(4), 2012, pp. 1014~1024.
- Ghysels, E., Santa-Clara, P., & Valkanov, R., “Predicting volatility: Getting the most out of return data sampled at different frequencies,” *Journal of Econometrics*, 131(1-2), 2006, pp. 59~95.

- Giacomini, R., & White, H., “Tests of conditional predictive ability,” *Econometrica*, 74(6), 2006, pp. 1545~1578.
- Giannone, D., Reichlin, L., & Small, D., “Nowcasting: The real-time informational content of macroeconomic data,” *Journal of Monetary Economics*, 55(4), 2008, pp. 665~676.
- Litterman, R. B., “Forecasting with Bayesian vector autoregressions—five years of experience,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 4(1), 1986, pp. 25~38.
- Mariano, R. S., & Murasawa, Y., “A new coincident index of business cycles based on monthly and quarterly series,” *Journal of Applied Econometrics*, 18(4), 2003, pp. 427~443.
- Newey, W. K., & West, K. D., “A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix,” *Econometrica*, 55(3), 1987, pp. 703~708.
- Sims, C. A., & Zha, T., “Bayesian methods for dynamic multivariate models,” *International Economic Review*, 39(4), 1998, pp. 949~968.
- Stock, J. H., & Watson, M. W., “Forecasting using principal components from a large number of predictors,” *Journal of the American Statistical Association*, 97(460), 2002, pp. 1167~1179.
- West, K. D., “Asymptotic inference about predictive ability,” *Econometrica*, 64(5), 1996, pp. 1067~1084.
- 뉴욕연방준비은행, The New York Fed Staff Nowcast 2025:Q3, <https://www.newyorkfed.org/research/policy/nowcast/#nowcast/2025:Q3>, 검색일자: 2025.9.15.

■ 저자 약력 ■

한치록 | 서울대학교 경제학과 졸업

미국 Michigan State University 경제학 박사
현, 고려대학교 경제학과 교수

윤참나 | 서울대학교 경제학부 졸업

미국 University of Pennsylvania 경제학 박사
현, 서울대학교 경제학부 교수

김준성 | 고려대학교 경영학과 졸업

미국 Cornell University 경제학 박사
현, 성균관대학교 경제학과 부교수

이승희 | 성균관대학교 경제학과 졸업

미국 Indiana University Bloomington 경제학 박사
현, 한국개발연구원 재정사회정책연구부 & 경제전망실 부연구위원

2025 재정전문가 네트워크

정책연구방법론분과

- 조세 및 재정제도 분석을 위한 방법론: 이론과 실제 활용 -

2025년 12월 23일 인쇄

2025년 12월 30일 발행

발행인 이 영

발행처 한국조세재정연구원

세종특별자치시 시청대로 336

TEL: (044)414-2114(대), www.kipf.re.kr

등록 1993년 7월 15일 제21-466호

조판및 세일포커스(주) (02)2275-6894

인쇄

© 한국조세재정연구원 2025

* 잘못 만들어진 책은 바꾸어 드립니다.